VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

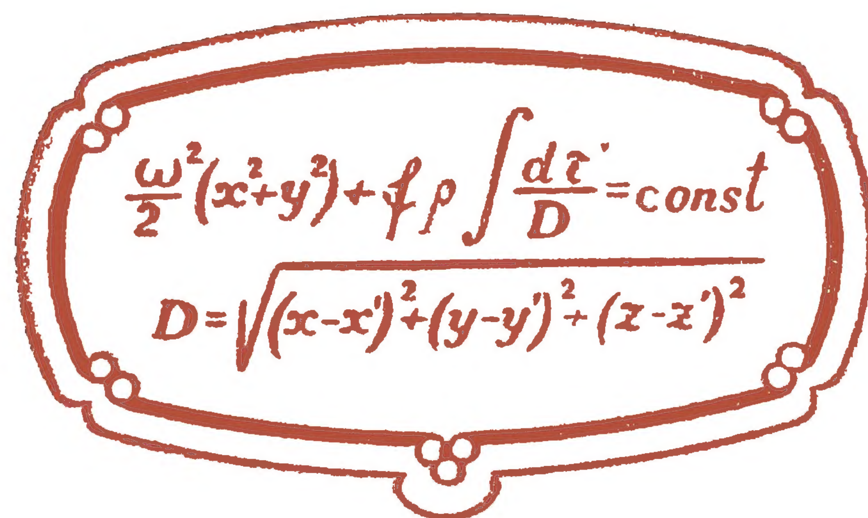


А. М. ЛЯПУНОВ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

РЕДАКЦИЯ
АКАДЕМИКА В. И. СМИРНОВА

КОММЕНТАРИИ
АКАДЕМИКА С. Н. БЕРНШТЕЙНА,
ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР
Л. Н. СРЕТЕНСКОГО
И ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР
Н. Г. ЧЕТАЕВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1948

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы

Председатель Комиссии президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*

Зам. председателя член-корреспондент Академии Наук СССР
П. Ф. ЮДИН


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
* А.М. ЛЯПУНОВ *

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ



ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом сочинении излагаются некоторые способы для решения вопросов о тех свойствах движения и, в частности, равновесия, которые известны под названием устойчивости и неустойчивости.

Обыкновенные вопросы такого рода, которым и посвящено это сочинение, приводят к исследованию дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

вторые части которых, зависящие от времени и неизвестных его функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при величинах x_s, численно достаточно малых, разлагаются в ряды по целым положительным степеням последних и уничтожаются, когда все эти величины делаются нулями.

Задача состоит при этом в том, чтобы узнать — можно ли начальные значения функций x_s, не делая их нулями, выбирать настолько численно малыми, чтобы во все время, следующее за начальным моментом, функции эти оставались численно меньшими некоторых заранее данных, отличных от нуля, но сколь угодно малых пределов.

Когда наши дифференциальные уравнения мы умеем интегрировать, задача эта, конечно, не представляет затруднений. Но важно иметь способы, которые позволяли бы решать ее независимо от выполнимости этого интегрирования.

Известно, что существуют случаи, когда рассматриваемая задача допускает приведение к некоторой задаче о maxima'х и minima'х.[1] Но область вопросов, которые таким путем могут быть разрешаемы, весьма ограничена, и в большинстве случаев необходимо прибегать к каким-либо иным методам.

Прием, которым пользуются обыкновенно, приводится к тому, что в исследуемых дифференциальных уравнениях отбрасывают все члены выше первого измерения относительно величин x_s и вместо первоначальных рассматривают получаемые таким путем линейные уравнения.

Так трактуется вопрос в сочинении Томсона (Thomson) и Тэта (Tait) «Treatise on Natural Philosophy» (vol. I, part I, 1879), в сочинениях Рауза (Routh) «A treatise on the Stability of a given State of motion» (1877) и «A treatise on the Dynamics of a System of rigid bodies» (part II, 4 edition, 1884), и, наконец, в сочинении Жуковского «О прочности движения» (Ученые записки Московского университета, Отдел физико-математический, вып. 4, 1882).

Конечно, указанный сейчас прием вносит весьма существенное упрощение, в особенности в тех случаях, когда коэффициенты в дифференциальных уравнениях суть постоянные величины. Но законность такого упрощения a priori ничем не оправдывается, ибо дело приводится к замене рассматриваемой задачи другою, с которою она может не находиться ни в какой зависимости. Во всяком случае очевидно, что если решение новой задачи и может давать ответ на первоначальную, то только при известных условиях, а последние обыкновенно не указываются.

[1] Мы разумеем здесь те случаи, к которым приложима известная теорема Лагранжа (Lagrange) о maxima'х силовой функции, касающаяся вопросов об устойчивости равновесия, или более общая теорема Рауза о maxima'х и minima'х известных интегралов дифференциальных уравнений движения, позволяющая решать некоторые вопросы об устойчивости движения (см.: The advanced part of a treatise on the Dynamics of a System of rigid bodies. 4 edition, 1884, p. 52, 53).

Должно, впрочем, заметить, что, сознавая нестрогость приема, некоторые авторы (как, например, Рауз) не ограничиваются одним первым приближением, к которому приводит интегрирование названных выше линейных уравнений, а рассматривают также второе и некоторые из следующих, получаемых обычными в подобных случаях методами. Но этим дело мало подвигается вперед, ибо вообще таким путем достигается только более точное представление функций x_s в пределах известного промежутка времени, что, конечно, не дает новых оснований для каких-либо заключений об устойчивости.

Единственная, сколько мне известно, попытка строгого решения вопроса принадлежит А. Пуанкаре (H. Poincaré), который в своем во многом отношении замечательном мемуаре «Sur les courbes définies par les equations différentielles» (Journal de mathématiques, 3-e série, tomes 7 et 8; 4-e série, tomes 1 et 2), и именно в двух последних его частях, рассматривает вопросы об устойчивости для случая систем дифференциальных уравнений второго порядка, а также останавливается на некоторых близких к ним вопросах, касающихся систем третьего порядка [1].

Хотя Пуанкаре и ограничивается очень частными случаями, но методы, которыми он пользуется, допускают значительно более общие приложения и способны привести еще ко многим новым результатам. Идеями, заключающимися в названном мемуаре, я руководствовался при большей части моих изысканий.

Задача, которую я себе поставил, предпринимая настоящее исследование, может быть формулирована так: указать те случаи, в которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости, и дать какие-либо способы, которые позволяли бы решать его по крайней мере в некоторых из тех случаев, когда по первому приближению нельзя судить об устойчивости.

Конечно, чтобы придти к каким-либо результатам, необходимо было сделать относительно рассматриваемых дифференциальных уравнений известные предположения.

Простейшее из них, и вместе с тем соответствующее наиболее важным и интересным приложениям, состояло бы в том, что коэффициенты в разложениях вторых частей этих уравнений суть постоянные величины. Весьма многим интересным вопросам соответствовало бы также более общее предположение, что коэффициенты эти суть периодические функции времени.

В этих двух предположениях вопрос и трактуется мною преимущественно.

Впрочем я касаюсь отчасти и более общего случая, когда названные коэффициенты суть какие-либо функции времени, числовые значения которых никогда не превосходят известных пределов.

В этом общем предположении трактуется вопрос в первой главе моего сочинения, где доказывается одно предложение, касающееся интегрирования рассматриваемых дифференциальных уравнений при помощи рядов известного типа,[1] и указываются некоторые вытекающие из него заключения об устойчивости. В том же предположении доказываются здесь и некоторые другие предложения, лежащие в основании дальнейших выводов.

Первая глава представляет только вступительную часть моего сочинения, в которой излагаются некоторые предложения принципиального характера. Главную же часть составляют вторая и третья, где и рассматриваются последовательно случаи постоянных и периодических коэффициентов.

[1] Ряды, о которых идет здесь речь, рассматривались мною в более частных предположениях в статье «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости» (Сообщения Харьковского математического общества, 2-я серия, т. I, 1888). Впоследствии я узнал, что в таких же предположениях ряды эти рассматривались А. Пуанкаре в его диссертации «Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles» (Thése, 1879).

Каждую из этих двух глав я начинаю замечаниями, касающимися линейных дифференциальных уравнений, соответствующих первому приближению, причем в третьей главе, где трактуется случай периодических коэффициентов, вхожу в некоторые подробности относительно так называемого характеристического уравнения.

Переходя затем к главному вопросу и указав условия, при которых он разрешается в первом приближении, я обращаюсь к тем особенным случаям, когда для этой цели в дифференциальных уравнениях необходимо принимать в расчет члены выше первого измерения.

Но случаи этого рода весьма разнообразны, и в каждом из них задача получает свой особый характер, так что не может быть и речи о каких-либо общих способах ее решения, которые относились бы ко всем таким случаям.

Поэтому различные возможные случаи приходится рассматривать отдельно, и я ограничиваюсь только простейшими из них, которые представляют затруднения, наименее серьезные. Исследование их и изложение соответствующих им способов решения вопросов об устойчивости занимает большую часть двух последних глав.

Не входя в дальнейшие подробности относительно содержания этого сочинения, с которым читатель может до известной степени ознакомиться из прилагаемого оглавления, замечу еще, что во второй главе я касаюсь вопроса о периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений. Вопрос этот находится в тесной связи с методами, прилагаемыми мною для одного из особенных случаев. Притом рассмотрение его приводит к некоторым заключениям об условной устойчивости для тех наиболее интересных случаев, когда дифференциальные уравнения имеют каноническую форму. А этими заключениями исчерпывается почти все, что пока можно сказать общего о таких случаях.

В прилагаемом сочинении читатель не найдет решения каких-либо определенных механических задач. По первоначальному плану приложения такого рода должны были составить четвертую главу. Но потом я отказался от намерения прибавлять ее, имея в виду следующие соображения.

Все наиболее интересные и важные вопросы механики (как, например, те, которые приводят к каноническим уравнениям) таковы, что в особенных случаях, когда первое приближение недостаточно, задача делается для них в высшей степени трудною, и пока невозможно указать каких-либо приемов для ее решения. Поэтому, при рассмотрении таких вопросов, мне пришлось бы ограничиться только примерами двоякого рода: или теми, в которых вопрос решался бы приведением к задаче о maxima'х и minima'х (т. е. на основании теоремы Рауза), или теми, в которых он решался бы в первом приближении. Но подобные примеры, хотя и представляли бы известный интерес, не относились бы к главной части моего исследования, которая, как уже было сказано, посвящена изложению методов, соответствующих особенным случаям известных категорий. Что же касается примеров, относящихся к этим методам, то их пришлось бы выбирать из области тех вопросов механики, в которых принимаются в расчет различного рода сопротивления среды. Таких примеров, конечно, можно было бы привести сколько угодно, но они сами по себе не представляли бы большого интереса и могли бы иметь значение только как поясняющие названные методы. Если же иметь в виду исключительно эту последнюю цель, то совершенно достаточно и тех примеров аналитического характера, которые приведены мною в надлежащих местах двух последних глав.

В заключение замечу, что сочинение мое не есть трактат об устойчивости, где было бы обязательно рассмотрение механических задач всякого рода. Подобный трактат должен

был бы заключать в себе многие вопросы, которых я здесь вовсе не касаюсь.

В этом сочинении я имел лишь в виду изложить то, что пока удалось мне сделать для решения поставленной мною задачи и что, может быть, может послужить точкою отправления для дальнейших исканий такого же характера.

Во время печатания этого сочинения появились два весьма интересных произведения А. Пуанкаре, в которых затрагиваются вопросы, стоящие весьма близко к рассматриваемым мною. Я разумею его мемуар «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique», появившийся в XIII томе «Acta mathematica» вскоре после того, как я начал печатать свое исследование, и вышедший в самое недавнее время первый том его большого сочинения «Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» (Paris, Gauthier-Villars, 1892).

В первом находятся некоторые результаты, сходные с полученными мною, на что я и указываю в надлежащих местах своего сочинения в подстрочных примечаниях. Что же касается второго, то ознакомиться с ним подробно я еще не успел; но по отношению к вопросам, рассматриваемым мною, в нем, повидимому, нет каких-либо существенных прибавлений к названному мемуару.

Считаю нужным сказать здесь об одном термине, встречающемся в этом сочинении.

Рассматривая ряды, расположенные по степеням величин, которые по характеру вопроса можно предполагать сколь угодно малыми, я весьма часто говорю о членах различных *порядков*. При этом под порядком каждого члена я разумею его измерение и термину «порядок» не приписываю никакого иного значения.

Я должен упомянуть еще об одном выражении, которым по примеру многих ученых нередко пользуюсь для сокра-

щения речи. Я разумею выражение: «ряды, *формально* удовлетворяющие» таким-то уравнениям.

Выражение это имеет весьма условный смысл. Но я счел излишним входить в какие-либо разъяснения его, так как в тех случаях, где мне приходится им пользоваться, относительно значения его не может возникнуть никаких сомнений.

Это сочинение издано Харьковским математическим обществом благодаря особым средствам, которые нашел возможным доставить ему Харьковский университет, за что и считаю долгом выразить последнему свою признательность.

Харьков,
5 апреля 1892 г.

А. Ляпунов.

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Постановка вопроса

1

Рассмотрим какую-либо материальную систему с k степенями свободы.

Пусть

$$q_1, \ q_2, \ldots, q_k$$

суть k независимых переменных, которыми мы условились определять ее положение.

Мы будем предполагать, что за переменные эти взяты такие величины, которые остаются вещественными для всяких действительных положений системы.

Рассматривая названные переменные как функции времени t, первые производные их по t будем обозначать через

$$q_1', \ q_2', \ldots, q_k'.$$

Во всякой динамической задаче, в которой силы определенным образом заданы, эти функции будут удовлетворять некоторым k дифференциальным уравнениям второго порядка.

Пусть для уравнений этих найдено какое-либо частное решение

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \ldots, \quad q_k = f_k(t),$$

в котором величины q_j выражаются вещественными функциями t, дающими при всяком t только возможные для них значения.[1]

Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть ***невозмущенным***, а все остальные, с которыми оно сравнивается, ***возмущенными***.

Разумея под t_0 некоторый данный момент времени, назовем соответствующие ему значения величин q_j, q_j' в каком-либо движении через q_{j0}, q_{j0}'.

Пусть

$$q_{10}=f_1(t_0)+\varepsilon_1, \quad q_{20}=f_2(t_0)+\varepsilon_2, \ldots, \quad q_{k0}=f_k(t_0)+\varepsilon_k;$$
$$q'_{10}=f_1'(t_0)+\varepsilon_1', \quad q'_{20}=f_2'(t_0)+\varepsilon_2', \ldots, \quad q'_{k0}=f_k'(t_0)+\varepsilon_k',$$

где ε_j, ε_j' суть некоторые вещественные постоянные.

Заданием этих постоянных, которые будем называть ***возмущениями***, определится возмущенное движение. Мы будем предполагать, что им можно приписывать всякие численно достаточно малые значения.

Говоря о возмущенных движениях, *близких* к невозмущенному, будем разуметь движения, для которых возмущения численно достаточно малы.

Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ суть какие-либо данные непрерывные вещественные функции величин

$$q_1, q_2, \ldots, q_k; \quad q_1', q_2', \ldots, q_k'.$$

Для невозмущенного движения они обратятся в некоторые известные функции t, которые обозначим соответственно

---

[1] Может случиться, что для величин q_j по самому их выбору возможны не всякие вещественные значения, а только небо́льшие или неменьшие известных пределов.

через $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Для возмущенного движения они будут некоторыми функциями величин

$$t,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_k;\ \ \varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \ldots,\ \varepsilon_k'.$$

Когда все ε_j, ε_j' равны нулю, величины

$$Q_1-F_1,\ Q_2-F_2,\ \ldots,\ Q_n-F_n$$

будут равными нулю для всякого t. Но если постоянные ε_j, ε_j', не будучи нулями, предполагаются все бесконечно малыми, то является вопрос, можно ли назначить такие бесконечно малые пределы для величин Q_s-F_s, которых последние никогда не превзошли бы по числовым значениям?

Решение этого вопроса, который составит предмет наших изысканий, зависит как от характера рассматриваемого невозмущенного движения, так и от выбора функций $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ и момента времени t_0. При определенном выборе последних, ответ на этот вопрос будет, следовательно, характеризовать в известном отношении невозмущенное движение, определяя собою то свойство последнего, которое будем называть *устойчивостью*, или противоположное ему, которое будем называть *неустойчивостью* [2].

Мы будем исключительно заниматься теми случаями, когда решение рассматриваемого вопроса не зависит от выбора момента t_0, в который сообщаются возмущения. Поэтому примем здесь следующее определение:

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n$ суть произвольно задаваемые положительные числа. Если при всяких L_s, как бы они малы ни были, могут быть выбираемы положительные числа $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_1'; E_2', \ldots, E_k'$ так, чтобы при всяких вещественных ε_j, ε_j', удовлетворяющих условиям

$$|\varepsilon_j|\leqslant E_j,\quad |\varepsilon_j'|\leqslant E_j',^{1}\qquad (j=1, 2, \ldots, k),$$

[1] Вообще под $|x|$ условимся разуметь числовое значение вещественного или модуль мнимого количества x.

и при всяком t, превосходящем t_0, выполнялись неравенства

$$|Q_1 - F_1| < L_1, \ |Q_2 - F_2| < L_2, \ \ldots, \ |Q_n - F_n| < L_n,$$

то невозмущенное движение по отношению к величинам $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ устойчиво; в противном случае — неустойчиво [3].

Приведем примеры.

Если материальная точка, притягиваемая неподвижным центром обратно пропорционально квадрату расстояния, описывает круговую траекторию, то движение ее по отношению к радиусу-вектору, проведенному из центра притяжения, а также по отношению к ее скорости устойчиво. То же движение по отношению к прямоугольным координатам точки неустойчиво.

Если же рассматриваемая точка описывает эллиптическую траекторию, то движение ее неустойчиво не только по отношению к прямоугольным координатам, но и по отношению к радиусу-вектору и скорости. Но оно устойчиво, например, по отношению к величине

$$r - \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где p и e — параметр и эксцентриситет эллипса, описываемого точкою в невозмущенном движении, а r и φ — радиус-вектор точки в возмущенном движении и угол, составляемый им с наименьшим радиусом-вектором в невозмущенном движении [4].

Когда твердое тело, имеющее неподвижную точку и не подверженное действию сил, вращается вокруг наибольшей или наименьшей из осей эллипсоида инерции, соответствующего этой точке, движение его устойчиво по отношению к угловой скорости и углам, составляемым мгновенною осью с какими-либо неподвижными или неизменно связанными с телом направлениями. Когда же оно вращается

вокруг средней оси эллипсоида инерции, движение его по отношению к тем же величинам неустойчиво [5].

Может случиться, что пределов E_j, E_j', удовлетворяющих требованию предыдущего определения, нельзя найти, если рассматривать всякие возмущения, а тем не менее возможно найти такие пределы для возмущений, подчиненных некоторым условиям вида:

$$f=0 \quad \text{или} \quad f \geqslant 0,$$

где f — некоторая функция величин

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k; \quad \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_k',$$

обращающаяся в нуль, когда все эти величины полагаются равными нулю.

В таких случаях мы будем говорить, что невозмущенное движение устойчиво для возмущений, подчиненных таким-то условиям.

Так, в предыдущем примере эллиптическое движение точки по отношению к ее прямоугольным или каким-либо другим координатам устойчиво для возмущений, удовлетворяющих условию неизменяемости полной энергии, или — по терминологии Томсона и Тэта — для консервативных возмущений.

Таким образом, для движений неустойчивых можно будет рассуждать об *условной устойчивости.*

Предыдущее определение конечно относится и к понятию об «устойчивости равновесия», ибо покой можно рассматривать как частный случай движения.

2

Решение нашего вопроса зависит от исследования дифференциальных уравнений возмущенного движения или, если угодно, от исследования дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции

$$Q_1-F_1=x_1, \quad Q_2-F_2=x_2, \quad \ldots, \quad Q_n-F_n=x_n.$$

Порядок системы этих последних уравнений вообще будет тот же, т. е. $2k$, но в некоторых случаях может быть и ниже.

Мы будем предполагать число n и функции Q_s такими, чтобы порядок этой системы был n и чтобы она приводилась к нормальному виду:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1, \quad \frac{dx_2}{dt}=X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}=X_n, \tag{1}$$

и везде далее будем рассуждать об этих последних уравнениях, называя их дифференциальными уравнениями возмущенного движения.

Все X_s в уравнениях (1) суть известные функции величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, t,$$

обращающиеся в нуль при

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

Мы сделаем теперь относительно них некоторые предположения и везде далее будем трактовать уравнения (1) исключительно в этих предположениях.

Мы допустим, что функции X_s даны не только для вещественных, но и для комплексных значений величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, модули которых достаточно малы, и что, по крайней мере для всякого вещественного t, большего или равного t_0, функции эти разложимы в ряды по целым положительным степеням величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, абсолютно сходящиеся для всяких x_s, удовлетворяющих условиям

$$|x_1|\leqslant A_1, \quad |x_2|\leqslant A_2, \quad \ldots, \quad |x_n|\leqslant A_n,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть или отличные от нуля постоянные, или такие функции t, которые никогда не делаются нулями.

Таким образом, для всякого из указанных значений t все X_s будут ***голоморфными*** (holomorphes) функциями величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$.[1]

Пусть

$$X_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + \\ + \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа

$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$

удовлетворяющие условию

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 1.$$

В этих разложениях все коэффициенты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ суть функции t, которые, согласно нашему предположению, должны оставаться определенными, а по характеру самой задачи — вещественными для всякого вещественного t, большего или равного t_0. Мы будем предполагать, кроме того, что для всех таких значений это суть функции непрерывные.

Приписывая t какое-либо из указанных сейчас значений и рассматривая в разложении X_s совокупность членов выше первого измерения при всевозможных комплексных значениях величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, модули которых соответственно равны $A_1, A_2, \ldots, A_n$, обозначим через M_s некоторый высший предел ее модуля при этих условиях. Тогда по известной теореме будем иметь

$$\left|P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right| < \frac{M_s}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}}. \qquad (2)$$

[1] Употребляя этот термин для сокращения речи и везде далее, считаем нужным сказать определенно, что мы будем разуметь под ним.

Рассматривая какую-либо функцию переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы будем называть ее по отношению к этим переменным голоморфною всякий раз, когда она может быть представляема под видом n-кратного ряда, расположенного по целым положительным степеням величин x_s, *по крайней мере для всех таких значений последних, модули которых не превосходят некоторых отличных от нуля пределов.*

Вообще далее будем рассматривать только вещественные значения t, не меньшие t_0. Если же в каких-либо случаях представится надобность рассматривать и другие значения t, то об этом всегда будем упоминать определенно.

Заметим, что если вместо времени за независимую переменную примем какую-либо непрерывную вещественную функцию времени, вместе с ним беспредельно возрастающую, то последняя при решении вопроса об устойчивости может играть такую же роль, как и время. Поэтому независимая переменная t в уравнениях (1) не всегда будет означать время, но во всяком случае — функцию его, удовлетворяющую только что сказанному условию.

Сделаем еще следующее замечание.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть значения функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $t = t_0$. Тогда, по свойству функций Q_s, всякой системе вещественных значений величин

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k; \quad \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_k', \tag{3}$$

численно достаточно малых, будет соответствовать некоторая система вещественных значений величин

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \tag{4}$$

Притом, как бы ни было мало данное положительное число A, эти последние всегда можно будет сделать численно меньшими A, подчиняя величины (3) условию, чтобы их числовые значения не превосходили достаточно малого, но отличного от нуля предела E.

Мы предположим теперь, что, как бы ни было мало данное положительное число E, всегда можно найти такое положительное число A, чтобы всякой системе вещественных значений величин (4), численно меньших A, соответствовали одна или несколько систем вещественных значений величин (3), численно меньших E.

При этом условии величины (4) могут играть такую же роль при решении вопроса об устойчивости, как и вели-

чины (3), если только заданием величин (4) функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (1), определяются вполне. Это последнее условие в силу предположений, которые мы делаем далее относительно уравнений (1) (п. 4), всегда будет выполняться. Поэтому далее вместо величин (3) будем рассматривать всегда величины (4).

3

Для интегрирования уравнений (1) в занимающем нас вопросе естественно представляется метод последовательных приближений, основанный на допущении, что начальные (т. е. соответствующие $t=t_0$) значения искомых функций численно достаточно малы.

Метод этот в своем простейшем виде приводит к рядам, которые могут быть получены следующим образом.

Полагая

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + x_s^{(3)} + \ldots, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \quad (5)$$

и рассматривая величины $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}$ вместе с их производными по t как обладающие m-ым измерением, вносим эти выражения функций x_s в уравнения (1) и в каждом из последних приравниваем между собою совокупности членов одинакового измерения той и другой части равенства. Таким образом получаем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_s^{(1)}}{dt} = p_{s1} x_1^{(1)} + p_{s2} x_2^{(1)} + \ldots + p_{sn} x_n^{(1)}, \qquad (s=1, 2, \ldots n), \quad (6)$$

$$\frac{dx_s^{(m)}}{dt} = p_{s1} x_1^{(m)} + p_{s2} x_2^{(m)} + \ldots + p_{sn} x_n^{(m)} + R_s^{(m)}, \quad (7)$$

$$(s=1, 2, \ldots, n), \ (m > 1).$$

Здесь $R_s^{(m)}$ суть известные целые рациональные функции от величин $x_\sigma^{(\mu)}$ с коэффициентами, представляющими суммы произведений из функций $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ на некоторые целые положительные числа.

Все $R_s^{(m)}$, соответствующие всякому данному m, конечно, будут зависеть только от тех $x_\sigma^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$.

Поэтому введенные нами функции $x_s^{(m)}$ можно будет определять из написанных уравнений последовательно в порядке возрастания m.

Первая задача, которой придется при этом заняться, будет состоять в интегрировании системы (6) однородных линейных уравнений.

Принимая в расчет предположенную определенность и непрерывность коэффициентов $p_{s\sigma}$, нетрудно доказать, что всегда найдется группа n^2 функций, определенных и непрерывных для всех рассматриваемых нами значений t,[1] которая представит систему n независимых решений для системы уравнений (6).

Предложение это докажется при помощи действительного составления некоторых выражений для функций $x_s^{(1)}$, удовлетворяющих названным уравнениям при всяком t, превосходящем t_0, и принимающих какие-либо заданные значения для $t = t_0$. А такие выражения можно получить под видом рядов, рассматривая, например, уравнения, выводимые из (6) умножением вторых частей их на некоторый параметр ε, и стараясь удовлетворить этим новым уравнениям рядами, расположенными по целым положительным степеням последнего. Если эти ряды составляются в предположении, что значения, принимаемые искомыми функциями при $t = t_0$, не зависят от ε, то они будут абсолютно сходящимися для всех рассматриваемых значений t и при всяком ε. Делая в них $\varepsilon = 1$, и получим сказанные выражения функций $x_s^{(1)}$.

Допустим, что каким-либо способом для уравнений (6) удалось найти систему n независимых частных решений.

Пусть

$$x_{s1},\ x_{s2},\ \ldots,\ x_{sn}$$

[1] Говоря о значениях t, мы всегда имеем в виду некоторые определенные числа. Поэтому бесконечность никогда не рассматриваем как значение t.

суть функции t, представляющие функцию $x_s^{(1)}$ в этих решениях.

Тогда общий интеграл системы (6) выразится уравнениями

$$x_s^{(1)} = a_1 x_{s1} + a_2 x_{s2} + \ldots + a_n x_{sn}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (8)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные постоянные.

После того как функции $x_s^{(1)}$ найдены, можно будет определять и все остальные $x_s^{(m)}$ последовательным интегрированием систем линейных неоднородных уравнений (7), соответствующих $m = 2, 3 \ldots$.

Каждое из этих интегрирований выполнится при помощи квадратур. При этом каждое из них введет n постоянных произвольных, и для определения последних представится широкий выбор закона, который вообще должен быть подчинен только условию, чтобы получаемые ряды по крайней мере в известных пределах были сходящимися.

Названные постоянные определятся вполне, если введем условие, чтобы все $x_s^{(m)}$, для которых $m > 1$, обращались в нуль при $t = t_0$.

Составим в этом предположении формулы для определения функций $x_s^{(m)}$, когда все $x_\sigma^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, уже найдены.

Положим

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Этот определитель будет функцией t, не обращающейся в нуль ни при каких рассматриваемых нами значениях t, ибо по известной теореме

$$\Delta = Ce^{\int \sum_1^n p_{ss}\, dt},$$

где C — отличная от нуля постоянная.

Обозначим минор этого определителя, соответствующий элементу x_{ij}, через Δ_{ij}.

Тогда искомые формулы будут следующего вида [6]:

$$x_s^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} dt \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \quad (9)$$

Функции $x_s^{(m)}$, определяемые этими формулами, остаются определенными и непрерывными для всех рассматриваемых значений t.

Относительно постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ это суть целые однородные функции m-ой степени.

Притом, если выбранная нами система частных решений уравнений (6) такова, что при $t = t_0$ все x_{ij} получают вещественные значения, то коэффициенты в этих функциях остаются вещественными для всех рассматриваемых значений t.

Определив таким образом функции $x_s^{(m)}$, обращаемся к вопросу о сходимости рядов (5), которые представятся как расположенные по целым положительным степеням постоянных a_s.

4

Мы уже сделали некоторые предположения относительно коэффициентов в разложениях вторых частей уравнений (1). Теперь прибавим к ним еще одно.

Мы будем предполагать, что за величины $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $M_1, M_2, \ldots, M_n$ могут быть приняты такие функции t, чтобы для всякого T, большего t_0, при t, изменяющемся в пределах t_0 и T, для каждой из функций A_s существовал некоторый положительный низший предел, а для каждой из функций M_s — некоторый высший предел.

В этом предположении докажем, что для всех значений t, лежащих между t_0 и T, как бы ни было велико данное

число T, предыдущие ряды (рассматриваемые как расположенные по степеням величин a_s) будут абсолютно сходящимися при всяких a_s, модули которых не превосходят некоторого отличного от нуля предела, известным образом зависящего от T.

Докажется это, как и другие подобные теоремы, с которыми встретимся далее, при помощи обычного в таких случаях метода, которым мы обязаны Коши (Cauchy).

Обращаясь к этому доказательству, замечаем, что при t, не выходящем из границ t_0 и T, можно назначить некоторые постоянные высшие пределы для модулей всех x_{ij} и $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ или, если угодно, для модулей всех

$$x_{ii}-1, \quad x_{ij}, \qquad (i \lesseqgtr j), \tag{10}$$

$$\frac{\Delta_{ii}}{\Delta}-1, \quad \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \qquad (i \lesseqgtr j). \tag{11}$$

Пусть K есть такой высший предел для величин (10), а K' — для величин (11).

Если рассматриваемая система частных решений уравнений (6) определена условием, что при $t=t_0$

$$x_{ii}=1, \quad x_{ij}=0, \qquad (i \lesseqgtr j),$$

то за K и K' можно взять такие непрерывные функции T, которые будут обращаться в нуль при $T=t_0$.

Пусть вообще $\{u\}$ означает результат замены в какой-либо целой функции u от величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ всех членов их модулями.

Тогда, обозначая через a наибольшую из величин $|a_s|$, из (8) и (9) выведем следующие неравенства:

$$\{x_s^{(1)}\} < (1+nK)\,a,$$

$$\{x_s^{(m)}\} < \int_{t_0}^{T} \{R_s^{(m)}\}\,dt + (K+K'+nKK') \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \{R_i^{(m)}\}\,dt.$$

Эти неравенства будут справедливы для всякого t, не выходящего из пределов t_0 и T.

Замечаем далее, что по свойству первоначального выражения $R_i^{(m)}$ через величины $x_s^{(\mu)}$, $P_i^{(m_1, \dots, m_n)}$, заменяя в нем последние высшими пределами величин

$$\{x_s^{(\mu)}\}, \quad |P_i^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}|,$$

найдем высший предел для величин $\{R_i^{(m)}\}$.

Поэтому, если некоторый общий высший предел величин

$$\{x_1^{(\mu)}\}, \quad \{x_1^{(\mu)}\}, \dots, \quad \{x_n^{(\mu)}\}$$

в рассматриваемых пределах изменяемости t обозначим через $x^{(\mu)}$, а через $R^{(m)}$ обозначим то, во что обратится каждая из функций

$$R_1^{(m)}, \quad R_2^{(m)}, \dots, \quad R_n^{(m)}$$

после замены величин $x_s^{(\mu)}$ величинами $x^{(\mu)}$ и величин $P_i^{(m_1, \dots, m_n)}$ некоторыми, не зависящими от i высшими пределами $P^{(m_1, \dots, m_n)}$ их числовых значений в тех же пределах изменяемости t, то найдем

$$\{x_s^{(m)}\} < (1 + nK)(1 + nK')(T - t_0) R^{(m)}.$$

Отсюда видно, что можно принять

$$x^{(1)} = (1 + nK) a,$$

$$x^{(m)} = (1 + nK)(1 + nK')(T - t_0) R^{(m)}, \qquad (m = 2, 3, \dots).$$

Но согласно неравенствам (2), для $P^{(m_1, \dots, m_n)}$ можно взять следующие величины:

$$P^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} = \frac{M}{A^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}},$$

где M есть некоторый общий высший предел для всех функций M_s, в рассматриваемых пределах изменяемости t, а A—

некоторый положительный низший предел, общий для всех функций A_s в тех же пределах изменяемости t.

Если же этими величинами заменим коэффициенты $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ в функциях X_s, то совокупности членов выше первого порядка в последних сделаются тождественными с разложением функции

$$M\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{x_1}{A}\right)\left(1-\frac{x_2}{A}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{A}\right)}-1-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}\right\}.$$

Поэтому, при сделанном выборе величин $P^{(m_1, \ldots, m_n)}$, величина $R^{(m)}$ представит совокупность членов m-го измерения относительно значков величин $x^{(s)}$ в разложении выражения

$$M\left\{\left(1-\frac{1}{A}\sum_{s=1}^{\infty}x^{(s)}\right)^{-n}-1-\frac{n}{A}\sum_{s=1}^{\infty}x^{(s)}\right\}.$$

Отсюда следует, что если рассмотрим уравнение

$$x=(1+nK)a+Ah\left\{\left(1-\frac{x}{A}\right)^{-n}-1-n\frac{x}{A}\right\}, \qquad (12)$$

где

$$h=(1+nK)(1+nK')\frac{M(T-t_0)}{A},$$

то ряд

$$x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+\ldots$$

представит разложение по целым положительным степеням a корня x этого уравнения, обращающегося в нуль при $a=0$. Поэтому ряд этот будет наверно сходящимся, если a меньше величины

$$g=\frac{A}{1+nK}\left\{1-(n+1)h\left[\left(\frac{1}{nh}+1\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]\right\},$$

представляющей наименьший из модулей всех значений a, при которых уравнение (12) имеет кратные корни. Ряд этот будет сходящимся даже и при $a=g$, ибо обладает положительными коэффициентами, а для названного корня, когда a приближается к g, несомненно, существует предел.

Но по самому определению величин $x^{(m)}$ сходимостью рассматриваемого ряда обусловливается абсолютная сходимость рядов (5) для всех значений t, лежащих между t_0 и T.

Поэтому заключаем, что для всех таких значений t ряды (5) будут наверно абсолютно сходящимися, если модули постоянных a_s не превосходят величины g.

Вместе с тем получаем и высший предел для модулей сумм этих рядов при условиях

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad |a_s| \leqslant g. \tag{13}$$

Этот высший предел представится значением, соответствующим $a=g$, вышеназванного корня уравнения (12) и, как нетрудно убедиться, не будет превосходить A.

Из последнего обстоятельства следует, что если ряды (5) внести в функции X_s, то функции эти можно будет представить рядами, расположенными по целым положительным степеням величин a_s.

При этих условиях можно, следовательно, написать равенства

$$X_s = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n + R_s^{(2)} + R_s^{(3)} + \ldots,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

которые, в силу уравнений (6) и (7), приводятся к следующим:

$$X_s = \frac{dx_s^{(1)}}{dt} + \frac{dx_s^{(2)}}{dt} + \frac{dx_s^{(3)}}{dt} + \ldots, \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Но ряды, находящиеся во вторых частях последних, при рассматриваемых условиях, очевидно, суть сходящиеся в равной степени для всех значений t, лежащих между t_0 и T,

и, следовательно, в этих пределах представляют производные от функций, определяемых рядами (5).

Поэтому написанные равенства приводят к заключению, что при условиях (13) ряды (5) представляют функции, действительно удовлетворяющие уравнениям (1).

Относительно найденного высшего предела g заметим, что при $T=t_0$ он принимает значение величины

$$\frac{A}{1+nK},$$

соответствующее тому же T. А значение это, согласно замеченному выше, можно считать равным соответствующему значению величины A всякий раз, когда выбранная нами система частных решений уравнений (6) такова, что при $t=t_0$

$$x_{ii}=1, \quad x_{ij}=0, \qquad (i \gtrless j).$$

В последнем предположении постоянные a_s суть значения функций x_s для $t=t_0$.

Мы можем поэтому утверждать, что если все A_s суть непрерывные функции t и если A_0 есть наименьшее из значений, принимаемых ими для $t=t_0$, то при всяких a_s, которые по числовым значениям меньше A_0, найдется такой предел T, больший t_0, что функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (1) и принимающие значения a_s при $t=t_0$, представятся абсолютно сходящимися рядами, расположенными по восходящим степеням этих значений, для всякого t, лежащего между t_0 и T.

Примечание. Для представления функций x_s в тех же пределах изменяемости t можно, конечно, получить бесчисленное множество других абсолютно сходящихся рядов, расположенных по целым положительным степеням некоторых других постоянных произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, модули которых достаточно малы.

Всякие ряды такого характера могут быть выводимы из предыдущих при помощи подстановок вида

$$a_s = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad (s=1,2,\ldots,n), \quad (14)$$

где f_s означают некоторые голоморфные функции величин α_s.

Рассматривая какие-либо ряды этого рода, допустим, что для них все функции f_s при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ делаются нулями. Допустим, кроме того, что функциональный определитель функций f_s в отношении величин α_σ при таком положении не делается нулем.

Тогда, если в этих рядах возьмем совокупности всех членов не выше m-го порядка относительно постоянных α_σ, то эти совокупности представляют то, что мы будем называть выражениями функций x_s в m-ом приближении.

Известно, что при сделанных предположениях относительно функций f_s уравнениям (14) всегда можно удовлетворить, выбирая для величин α_σ некоторые голоморфные функции величин a_s, уничтожающиеся при $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, и что, когда все $|\alpha_\sigma|$, $|a_s|$ подчинены условию не превосходить некоторых достаточно малых пределов, такое решение будет единственно возможным.

Поэтому различные m-ые приближения, полученные из различных разложений рассматриваемого характера, будучи выражены через постоянные a_s, представятся рядами, расположенными по целым положительным степеням последних, и ряды эти будут разниться между собою только членами выше m-го порядка.

5

При той общей точке зрения, с какой мы рассматривали вопрос до сих пор, мы имели в виду только доказать, что по крайней мере для t, не выходящего из известных границ, всегда существуют функции, удовлетворяющие уравнениям (1) и в данный момент принимающие какие-либо дан-

ные, численно достаточно малые значения, и что метод последовательных приближений доставляет ряды, которые при известных условиях могут служить для определения этих функций. Но переходя к изложению каких-либо способов решения вопросов об устойчивости, мы должны будем оставить эту точку зрения, ограничивая нашу задачу некоторыми более определенными предположениями относительно дифференциальных уравнений возмущенного движения.

Преимущественно мы будем заниматься рассмотрением двух следующих случаев: когда все коэффициенты p_{s0}, $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ суть постоянные величины и когда это суть периодические функции t с одним и тем же вещественным периодом.

Первый, конечно, можно было бы рассматривать как частный случай второго. Но по многим причинам мы предпочитаем рассмотреть его отдельно.

В первом случае, по примеру Рауза, невозмущенное движение мы будем называть (для величин, по отношению к которым исследуется устойчивость) *установившимся* (steady); во-втором — *периодическим.*

Рассматривая эти два случая, увидим, что для решения нашего вопроса весьма существенное значение будет иметь исследование первого приближения.

Мы покажем, при каких условиях это исследование вполне решает вопрос об устойчивости и при каких оно вообще делается недостаточным. Вместе с тем укажем и некоторые способы для решения вопроса в известных случаях этого последнего рода.

Прежде, однако, чем перейти к детальному рассмотрению вопроса, мы остановимся на некоторых общих предложениях, которые послужат точками отправления при наших изысканиях.

Все способы, которые мы можем указать для решения занимающего нас вопроса, можно разделить на две категории.

К одной мы причислим все те, которые приводятся к непосредственному исследованию возмущенного движения и в основании которых поэтому лежит разыскание общих или частных решений дифференциальных уравнений (1).

Вообще эти решения придется искать под видом бесконечных рядов, простейшим типом которых могут служить рассмотренные в предыдущем параграфе. Это суть ряды, расположенные по целым положительным степеням постоянных произвольных. Но далее мы встретимся также и с некоторыми рядами другого характера.

Совокупность всех способов исследования устойчивости, относящихся к этой категории, назовем *первым методом*.

К другому мы причислим все те, которые основываются на принципах, не зависящих от разыскания каких-либо решений дифференциальных уравнений возмущенного движения.

Таков, например, известный способ исследования устойчивости равновесия в случае существования силовой функции.

Эти способы могут приводиться к разысканию и исследованию интегралов уравнений (1); и вообще в основании всех тех из них, с которыми встретимся далее, всегда будет лежать разыскание функций переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ по некоторым данным условиям, которым должны удовлетворять их полные производные по t, составленные в предположении, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть функции t, удовлетворяющие уравнениям (1).

Совокупность всех способов этой категории мы назовем *вторым методом*.

Основания последнего, выраженные в нескольких общих теоремах, изложим в конце этой главы. Теперь же остановимся на приложении первого метода к одному довольно общему случаю дифференциальных уравнений возмущенного движения, заключающему в себе случаи как установившихся, так и периодических движений.

Случай этот есть тот, когда можно предполагать, что при $t \geqslant t_0$ для функции A_s существует некоторый положительный низший предел A, а для функций M_s некоторый высший предел M, и когда при тех же значениях t можно назначить некоторый высший предел и для числовых значений всех коэффициентов $p_{s\sigma}$.

Мы начнем при этом с рассмотрения линейных дифференциальных уравнений, соответствующих первому приближению.

О некоторых системах линейных дифференциальных уравнений

6

Прежде всего условимся в некоторых терминах и докажем некоторые вспомогательные предложения.

Будем рассматривать функции вещественной переменной t, получающие вполне определенные значения для всякого t, большего некоторого предела t_0 или равного ему. Будем при этом рассматривать только такие функции, для модулей которых при изменении t от t_0 до какого угодно данного числа T, большего t_0, существовали бы высшие пределы.

Всякую такую функцию будем называть *ограниченной* (limitée), если модули ее при $t > t_0$ остаются всегда меньше некоторого предела. Напротив, функцию, модули которой надлежащим выбором значений t, больших t_0, могут быть сделаны бóльшими всякой данной положительной величины, как бы она ни была велика, будем называть *неограниченной*. Наконец, ограниченную функцию, которая с беспредельным возрастанием t приближается к пределу, равному нулю, будем называть *исчезающей*.

Рассматривая одновременно с функцией x функцию $\frac{1}{x}$, будем предполагать, что при всяком данном T, большем t_0,

в промежутке от t_0 до T точный низший предел модуля x отличен от нуля.

Лемма I. *Если x есть ограниченная функция t, то $xe^{-\lambda t}$ при всяком положительном постоянном λ есть функция исчезающая.*

Лемма непосредственно вытекает из предыдущих определений.

Лемма II. *Если x не есть исчезающая функция t, то $xe^{\lambda t}$ при всяком положительном постоянном λ есть функция неограниченная.*

В самом деле, если x не есть исчезающая функция, то всегда найдется такая положительная постоянная a, при которой надлежащим выбором значений t, бóльших произвольно заданного предела T, как бы он велик ни был, модуль функции x можно будет сделать превосходящим a. Тогда, рассматривая только выбранные таким образом t, будем иметь

$$|xe^{\lambda t}| > ae^{\lambda T}.$$

А этим и доказывается лемма, ибо вторую часть неравенства выбором достаточно большого T можно сделать сколько угодно большою.

Лемма III. *Разумея под x некоторую функцию t, а под λ_1 и λ' некоторые вещественные постоянные, допустим, что функция $z = xe^{\lambda t}$ при $\lambda = \lambda_1$ есть исчезающая, а при $\lambda = \lambda'$ неограниченная. Тогда можно найти такое вещественное число λ_0, что функция z при $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ будет неограниченной для всякого положительного постоянного ε и исчезающей для всякого отрицательного постоянного ε.*

Действительно, из предыдущих лемм следует, что если существует такое постоянное значение λ, при котором функция z есть ограниченная не исчезающая, то это значение и будет искомым.

В противном случае, вставляя между числами λ_1 и λ' ряд промежуточных чисел и последовательно переходя в этом

ряду от меньших чисел к большим, начиная от λ_1 (ибо λ_1 необходимо менее λ'), сначала будем встречать только числа, для которых z есть исчезающая, затем только числа, для которых она есть неограниченная функция.

Поэтому в последнем случае последовательными вставками промежуточных чисел по закону, надлежащим образом выбранному, мы всегда можем получить два бесконечных ряда чисел:

неубывающий: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$

и невозрастающий: $\lambda, \lambda'', \lambda''', \ldots$ —

таких, чтобы каждое число первого ряда было меньше каждого числа второго, чтобы разность

$$\lambda^{(n)} - \lambda_n$$

выбором достаточно большого n можно было сделать насколько угодно малою и чтобы функция

$$xe^{\lambda_n t}$$

для всякого n была исчезающей, а функция

$$xe^{\lambda^{(n)} t}$$

для всякого n неограниченной.

Эти два ряда определят число λ_0, не меньшее ни одного из чисел первого ряда и не большее ни одного из чисел второго, которое и будет искомым.

Число λ_0 будем называть *характеристичным* числом функции x.

Примечание. Функция x, для которой произведение $xe^{\lambda t}$ есть исчезающая функция при всяком λ или неограниченная при всяком λ, не имеет характеристичного числа. Но мы можем условиться говорить, что в первом случае характеристичное число есть $+\infty$, во втором $-\infty$. При этом условии всякая функция будет иметь конечное или бесконечное характеристичное число.

Приведем примеры.

Для всякой отличной от нуля постоянной характеристичное число есть нуль, а для нуля $+\infty$. Для функции t^m (m — постоянная) характеристичное число равно 0.

Для функции $e^{t\cos\frac{1}{t}}$ характеристичное число равно -1,

»	»	$e^{-t\cos\frac{1}{t}}$	»	»	»	$+1$,
»	»	$e^{\pm t\sin t}$	»	»	»	-1,
»	»	$e^{te^{\sin t}}$	»	»	»	$-e$,
»	»	$e^{-te^{\sin t}}$	»	»	»	$+\frac{1}{e}$,
»	»	t^t	»	»	»	$-\infty$,
»	»	t^{-t}	»	»	»	$+\infty$.

Примечание. Вообще если $f(t)$ есть такая вещественная функция t, а λ такая вещественная постоянная, что величину

$$|\lambda - f(t)|$$

надлежащим выбором значений t, бóльших произвольно заданного предела, можно сделать насколько угодно малою, и если притом для всякого положительного постоянного ε, как бы оно мало ни было, можно найти такой предел T, что

$$\lambda - f(t) < \varepsilon$$

для всех значений t, больших T, то λ есть характеристичное число функции

$$e^{-tf(t)}.$$

При доказательстве следующих предложений мы ограничиваемся случаем, когда характеристичные числа данных функций конечны. Но из этих предложений леммы IV, V и VIII можно будет считать справед-

ливыми и для всех случаев бесконечных характеристичных чисел, в которых они не утрачивают определенного смысла.

Лемма IV. *Характеристичное число суммы двух функций равно наименьшему из характеристичных чисел этих функций, когда эти числа различны, и не меньше их, когда они равны.*

В самом деле, пусть λ_1 и λ_2 суть характеристичные числа функций x_1 и x_2, и пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

Тогда функции

$$x_1 e^{(\lambda_1+\varepsilon)t}, \quad x_2 e^{(\lambda_1+\varepsilon)t}$$

будут исчезающими для всякого отрицательного ε. Такою же будет поэтому и сумма их. Если же притом $\lambda_1 < \lambda_2$, то при

$$0 < \varepsilon < \lambda_2 - \lambda_1$$

первая из этих функций будет неограниченной, вторая исчезающей, а следовательно сумма их неограниченной. Но тогда последняя будет неограниченной и для всякого положительного ε.

Поэтому характеристичное число функции $x_1 + x_2$, будучи во всяком случае не меньше λ_1, при последнем условии равно λ_1.

Примечание. Когда слагаемые функции, имеющие равные характеристичные числа, таковы, что отношение их есть величина чисто мнимая или вообще комплексная с постоянным аргументом, отличным от нечетной кратности π, то характеристичное число суммы всегда равно характеристичному числу слагаемых.

Лемма V. *Характеристичное число произведения двух функций не меньше суммы их характеристичных чисел.*

В самом деле, если λ_1 и λ_2 суть характеристичные числа функций x_1 и x_2, то функция

$$x_1 x_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\varepsilon)t} = x_1 e^{\left(\lambda_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)t} x_2 e^{\left(\lambda_2+\frac{\varepsilon}{2}\right)t}$$

есть исчезающая для всякого отрицательного ε.

Что характеристичное число произведения может быть больше суммы характеристичных чисел производителей, достаточно ясно видно из приведенных выше примеров.

Следствие. *Сумма характеристичных чисел функций x и $\frac{1}{x}$ не больше нуля.*

Лемма VI. *Если*

$$x = e^{-t(f+i\varphi)},$$

где $i=\sqrt{-1}$, а f и φ суть некоторые вещественные функции t, то для того, чтобы сумма характеристичных чисел функций x и $\frac{1}{x}$ была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы функция f с беспредельным возрастанием t приближалась к некоторому пределу.

Достаточность сказанного условия очевидна, ибо если функция f с беспредельным возрастанием t стремится к некоторому пределу, то последний служит характеристичным числом функции x.

Что же касается его необходимости, то она следует из того, что если λ и $-\lambda$ суть характеристичные числа функций x и $\frac{1}{x}$, то при всяком данном положительном ε, как бы оно мало ни было, обе функции

$$e^{-t(\varepsilon-\lambda+f)} \quad \text{и} \quad e^{-t(\varepsilon+\lambda-f)}$$

будут исчезающими; а последнее возможно только при условии, что

$$|\lambda - f| < \varepsilon$$

для всех значений t, больших некоторого достаточно большого предела.

Лемма VII. *Если сумма характеристичных чисел функций x и $\frac{1}{x}$ равна нулю, то характеристичное число произведения z из функции x и какой-либо функции y равно сумме характеристичных чисел этих последних.*

В самом деле, пусть λ, μ, S суть характеристичные числа функций x, y, z, и пусть характеристичное число функции $\frac{1}{x}$ равно $-\lambda$.

Тогда, прилагая лемму V к каждому из двух равенств

$$z = xy, \quad y = z\frac{1}{x},$$

найдем

$$S \geqslant \lambda + \mu, \quad \mu \geqslant S - \lambda,$$

откуда

$$S = \lambda + \mu.$$

Пусть x есть интегрирующаяся функция t.

Обозначая через t_1 какое-либо не меньшее t_0 данное число, рассмотрим интеграл

$$u = \int_{t_1}^{t} x dt,$$

если характеристичное число функции x отрицательно или равно нулю, и интеграл

$$u = \int_{t}^{\infty} x dt,$$

если это характеристичное число положительно.

Тогда докажется следующее предложение.

Лемма VIII. *Характеристичное число интеграла не меньше характеристичного числа подинтегральной функции.*

Пусть λ есть характеристичное число функции x. Тогда функция

$$xe^{(\lambda-\eta)t}$$

при всякой положительной постоянной η будет исчезающей и следовательно ограниченной. Обозначим через M высший предел ее модулей для $t \geqslant t_0$.

При $\lambda > 0$ и $\eta < \lambda$ будем иметь

$$|u| < M \int_t^\infty e^{-(\lambda-\eta)t} dt = \frac{M}{\lambda-\eta} e^{-(\lambda-\eta)t},$$

откуда следует, что

$$ue^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

есть исчезающая функция при всяком ε, большем η. Но η можно предполагать насколько угодно малым. Поэтому предыдущая функция есть исчезающая при всяком положительном ε.

При $\lambda \leqslant 0$ будем иметь

$$|u| < M \int_{t_1}^t e^{-(\lambda-\eta)t} dt = \frac{M}{\eta-\lambda} e^{-(\lambda-\eta)t} + \text{const.},$$

откуда следует, что

$$ue^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

есть исчезающая функция при всяком ε, большем η, а следовательно, и при всяком положительном ε.

Далее нам придется рассматривать группы, состоящие из нескольких, функций. При этом мы введем понятие *о характеристичном числе группы,* называя так наименьшее из характеристичных чисел функций, составляющих группу.

7

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (15)$$

предполагая, что все коэффициенты $p_{s\sigma}$ определенным образом заданы по крайней мере для всех значений t, не меньших некоторого предела t_0, и представляют непрерывные и ограниченные вещественные функции t.

Говоря о каком-либо решении этой системы уравнений, будем подразумевать, что речь идет о группе n функций

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

совокупно удовлетворяющих этим уравнениям (а следовательно, определенных и непрерывных) при *всяком* t, не меньшем t_0. Такие группы функций, как уже было замечено раньше, всегда могут быть найдены. Притом всегда найдется n таких групп, которые составят систему n независимых решений.

Теорема I. *Всякое решение системы дифференциальных уравнений* (15), *отличное от очевидного*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

имеет конечное характеристичное число.

Будем рассматривать только решения, в которых не все функции x_s тождественно равны нулю. При этом сначала рассмотрим решения вещественные, т. е. такие, в которых все x_s суть вещественные функции t.

Разумея под λ некоторую вещественную постоянную, положим

$$z_s = x_s e^{\lambda t}, \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \quad (16)$$

Тогда уравнения (15) преобразуются в следующие:

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1} z_1 + p_{s2} z_2 + \ldots + (p_{ss} + \lambda) z_s + \ldots + p_{sn} z_n,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

из которых выведем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{n} z_s^2 = \sum_{s=1}^{n} (p_{ss} + \lambda) z_s^2 + \sum (p_{s\sigma} + p_{\sigma s}) z_s z_\sigma,$$

предполагая, что вторая сумма во второй части равенства распространена на всевозможные различные комбинации различных чисел s и σ, взятых из ряда $1, 2, \ldots, n$.

Вторая часть последнего равенства есть некоторая квадратичная форма величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$, в которой коэффициенты зависят от λ и t. Притом, в силу предположенной ограниченности функций $p_{s\sigma}$, зависимость эта такова, что очевидно всегда можно найти такие значения λ, при которых эта форма будет положительной для всех рассматриваемых значений t, оставаясь всегда больше формы

$$\frac{1}{2} N (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2) \tag{17}$$

при произвольно заданном положительном постоянном N. Также очевидно, что можно найти и такие значения λ, при которых для тех же значений t эта форма будет отрицательной, оставаясь всегда численно большей формы (17).

При всяком λ первого рода получим неравенство

$$\frac{d}{dt} \sum z_s^2 > N \sum z_s^2,$$

из которого, обозначая через C некоторую положительную постоянную, выведем

$$\sum z_s^2 > C e^{Nt}$$

для всякого t, большего некоторого предела.

При значении λ второго рода будем иметь

$$\frac{d}{dt}\sum z_s^2 < -N\sum z_s^2,$$

откуда (если C попрежнему обозначает положительную постоянную)

$$\sum z_s^2 < Ce^{-Mt}$$

также для всякого t, большего некоторого предела.

Поэтому в первом случае величина $\sum z_s^2$ с беспредельным возрастанием t будет беспредельно возрастать; во втором она будет приближаться при этом к пределу, равному нулю.

Таким образом убеждаемся, что можно найти как такие значения λ, при которых в группе функций (16) непременно находятся неограниченные, так и такие, при которых все эти функции суть исчезающие.

Отсюда на основании предыдущего заключаем, что в каждом вещественном решении

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \tag{18}$$

отличном от очевидного $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, непременно найдутся функции с конечными характеристичными числами и не найдется ни одной с характеристичным числом $-\infty$. Поэтому характеристичное число группы функций (18) всегда конечно.

Чтобы обнаружить справедливость теоремы вообще, достаточно теперь только заметить, что всякое решение

$$x_1 = u_1 + \sqrt{-1}\,v_1,\ x_2 = u_2 + \sqrt{-1}\,v_2, \ldots,\ x_n = u_n + \sqrt{-1}\,v_n \tag{19}$$

системы уравнений (15) будет составлено из двух вещественных решений

$$\begin{matrix} u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n, \end{matrix} \tag{20}$$

той же системы и что на основании леммы IV и сделанного к ней примечания характеристичное число группы функций (19) равно характеристичному числу группы функций (20)[7].

Примечание. Мы предполагали все коэффициенты $p_{s\sigma}$ в уравнениях (15) вещественными. Но доказав теорему в этом предположении, ее, очевидно, легко распространить и на случай комплексных $p_{s\sigma}$, лишь бы только это были непрерывные и ограниченные функции t. Поэтому все предположения, доказываемые далее относительно уравнений (15), будут справедливы и в случае комплексных коэффициентов.

Пусть для уравнений (15) найдено k решений

$$\left.\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, \ldots, & x_{n1}, \\ x_{12}, & x_{22}, \ldots, & x_{n2}, \\ x_{1k}, & x_{2k}, \ldots, & x_{nk}. \end{matrix}\right\} \qquad (21)$$

Полагая

$$x_s = C_1 x_{s1} + C_2 x_{s2} + \ldots + C_k x_{sk}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ суть некоторые постоянные, из которых *ни одна не нуль,* мы будем говорить, что решение

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

есть *линейная комбинация* решений (21).

Из леммы IV следует, что характеристичное число решения, представляющего линейную комбинацию нескольких решений, не меньше характеристичного числа системы комбинируемых решений (т. е. характеристичного числа группы функций, составляющих систему решений) и равно этому числу, когда характеристичные числа всех комбинируемых решений различны.

Из последнего выводим, что всякие решения (конечно, отличные от $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$), характеристичные числа которых различны, суть независимые.

Отсюда заключаем о справедливости следующего предложения.

Теорема II. *Система уравнений* (15) *не может иметь больше n решений, отличных от очевидного*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

характеристичные числа которых были бы все различными.

Везде далее будем рассуждать только о решениях в которых не все функции x_s тождественно равны нулю [8].

8

Пусть для системы уравнений (15) найдена какая-либо система n независимых решений. Составляя из последних всевозможные линейные комбинации, мы можем вывести из этой системы всякую другую полную систему независимых решений.

Допустим, что всякая найденная система n независимых решений преобразовывается в другую по следующему правилу: каждый раз, когда из каких-либо решений этой системы может быть составлена линейная комбинация, характеристичное число которой было бы больше характеристичного числа группы комбинируемых решений, одно из последних, а именно одно из тех, характеристичные числа которых равны характеристичному числу группы, заменяется в рассматриваемой системе этой линейной комбинацией.

Так как число различных характеристичных чисел, которыми могут обладать решения системы уравнений (15), ограниченно, то, поступая таким образом, мы получим, наконец, систему n решений такого свойства, что *всякая линейная комбинация всяких входящих в ее состав решений будет обладать характеристичным числом, равным характеристичному числу группы комбинируемых решений.*

Всякую такую систему n решений (которые, очевидно, независимы) будем называть *нормальной.*

Вследствие предполагаемой нами вещественности коэффициентов $p_{s\sigma}$ в уравнениях (15), для уравнений этих можно найти систему n вещественных независимых решений. Исходя из такой системы и при составлении линейных комбинаций пользуясь только вещественными коэффициентами, мы могли бы получить систему n решений, удовлетворяющую предыдущему требованию для всяких линейных комбинаций с вещественными коэффициентами. Но тогда эта система будет удовлетворять этому требованию и для линейных комбинаций с какими угодно коэффициентами (лемма IV, примечание). Система эта будет, следовательно, нормальной.

В силу этого замечания, мы можем, в случае надобности, все функции, входящие в состав нормальной системы, предполагать вещественными.

Из определения нормальной системы следует, что если возможно найти систему n решений, характеристичные числа которых были бы все различны, то эта система есть нормальная.

Из того же определения выводится следующее предложение:

Теорема I. *Пусть найдена какая-либо система n независимых решений*

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, \\ x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}, \end{array}\right\}$$

и пусть из нее выведена новая

$$\left.\begin{array}{l} z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{n1}, \\ z_{12}, z_{22}, \ldots, z_{n2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{nn}, \end{array}\right\} \qquad (22)$$

в которой вообще

$$z_{sk} = x_{sk} + \alpha_{k1} x_{s\,k+1} + \alpha_{k2} x_{s\,k+2} + \ldots + \alpha_{k\,n-k} x_{sn},$$

$\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{k\,n-k}$ *суть такие постоянные, что характеристичное число всякого решения*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

в котором

$$x_s = x_{sk} + \beta_1 x_{s\,k+1} + \beta_2 x_{s\,k+2} + \ldots + \beta_{n-k} x_{sn},$$

а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-k}$ — *какие-либо постоянные, не больше характеристичного числа решения*

$$z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{nk}.$$

Тогда система решений (22) *есть нормальная.*

Для доказательства замечаем, что если бы система (22) не была нормальной, то между решениями ее можно было бы найти группу таких, которые, обладая общим характеристичным числом λ, могли бы доставлять линейные комбинации с характеристичным числом, превосходящим λ. Но по самому определению величин z_{sk}, таких решений в системе (22), очевидно, нельзя найти.

Пусть k есть число всех *различных* характеристичных чисел, которыми могут обладать решения уравнений (15), и пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$$

суть все эти числа.

Обозначим через n_s число решений с характеристичным числом λ_s, входящих в состав вообще какой-либо системы n независимых решений. Некоторые из чисел n_s могут быть и нулями. Но они во всяком случае будут таковы, что

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Предполагая

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k,$$

обозначим еще через N_s точный высший предел числа независимых решений с характеристичным числом λ_s, допускаемых системой уравнений (15). Очевидно будем иметь

$$N_1 > N_2 > \ldots > N_k,$$

$$N_1 = n, \quad n_s + n_{s+1} + \ldots + n_k \leqslant N_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

При этом докажутся следующие предложения:

Теорема II. *Для всякой нормальной системы решений* $n_1 = n - N_2, \quad n_2 = N_2 - N_3, \ldots, \quad n_{k-1} = N_{k-1} - N_k, \quad n_k = N_k.$

В самом деле, всякое решение есть линейная комбинация некоторых решений нормальной системы. А по свойству этой системы, решение, обладающее характеристичным числом λ_s, может быть линейной комбинацией только тех решений нормальной системы, характеристичные числа которых не меньше λ_s. Поэтому число допускаемых системой уравнений (15) независимых решений с характеристичным числом λ_s не может быть больше величины

$$n_s + n_{s+1} + \ldots + n_k,$$

соответствующей нормальной системе; а потому для последней

$$n_s + n_{s+1} + \ldots + n_k = N_s,$$

откуда и следует справедливость теоремы.

Теорема III. *Сумма*

$$S = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \ldots + n_k \lambda_k$$

характеристичных чисел всех решений, входящих в состав системы n независимых решений, для нормальной системы достигает своего высшего предела.

В самом деле, полагая

$$n_s + n_{s+1} + \ldots + n_k = N_s',$$

найдем

$$S = n\lambda_1 + N_2'(\lambda_2 - \lambda_1) + N_3'(\lambda_3 - \lambda_2) + \ldots + N_k'(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

Но мы только что видели, что для нормальной системы каждое из чисел N_s' достигает своего высшего предела N_s. А потому, замечая, что в этом выражении S коэффициенты при величинах $N_2', N_3', \ldots, N_k'$ все положительны, и убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема IV. *Всякая система n независимых решений, для которой сумма характеристичных чисел всех составляющих ее решений достигает своего высшего предела, есть нормальная.*

Теорема следует из самого определения нормальной системы, ибо если бы возможно было из каких-либо решений рассматриваемой системы составить линейную комбинацию, характеристичное число которой было бы более характеристичного числа группы комбинируемых решений, то можно было бы найти систему n независимых решений, для которой сумма всех характеристичных чисел была бы больше, чем для рассматриваемой.

Теорема V. *Сумма характеристичных чисел независимых решений системы уравнений* (15) *ни в коем случае не превосходит характеристичного числа функции*

$$e^{\int \sum_{s=1}^{n} p_{s\,s}\, dt}$$

В самом деле, если Δ есть определитель, составленный из каких-либо n независимых решений, то

$$e^{\int \sum p_{s\,s}\, dt} = C\Delta,$$

где C — некоторая постоянная. А на основании лемм IV и V характеристичное число Δ не меньше

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \ldots + n_k\lambda_k.$$

С л е д с т в и е. *Всякая система n независимых решений, для которой сумма характеристичных чисел всех решений равна характеристичному числу функции*

$$e^{\int \sum p_{ss}\,dt},$$

есть нормальная.

Следует, однако, иметь в виду, что не всегда можно найти систему n независимых решений, для которой имело бы место только что сказанное равенство.

Так, например, если имеем систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos\log t + x_2 \sin\log t,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \sin\log t + x_2 \cos\log t,$$

то при надлежащем определении произвольной постоянной будем иметь

$$e^{\int \sum p_{ss}\,dt} = e^{t(\sin\log t + \cos\log t)},$$

что представляет функцию с характеристичным числом $-\sqrt{2}$. Притом для этих уравнений находим систему решений

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ e^{t\sin\log t} & e^{t\sin\log t} \\ t\cos\log t & -e^{t\cos\log t}, \end{array}$$

которая, как нетрудно убедиться, есть нормальная, а между тем для нее сумма характеристичных чисел (равная -2) меньше предыдущего числа.

9

Мы знаем (лемма V, следствие), что сумма характеристичных чисел функций

$$e^{\int \sum p_{ss}\,dt} \quad \text{и} \quad e^{-\int \sum p_{ss}\,dt}$$

не больше нуля.

Поэтому, если μ есть характеристичное число второй из этих функций, то сумма S характеристичных чисел решений нормальной системы не может превосходить числа $-\mu$. Притом равенство $S=-\mu$ возможно только при условии, что сумма характеристичных чисел рассматриваемых двух функций равна нулю.

Это равенство

$$S+\mu=0$$

для уравнений с постоянными или периодическими коэффициентами действительно имеет место. Но может иметь место и во многих других случаях.

Вообще при существовании сейчас сказанного равенства систему линейных дифференциальных уравнений (15) мы будем называть *правильной*, а в противном случае — *неправильной*.

Так, например, система уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1\cos at+x_2\sin bt,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_1\sin bt+x_2\cos at$$

есть правильная, каковы бы ни были вещественные постоянные a и b.

В конце предыдущего параграфа был приведен пример неправильной системы уравнений.

Чтобы дать пример более общего характера, рассмотрим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=p_{11}x_1,\\ \frac{dx_2}{dt}&=p_{21}x_1+p_{22}x_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=p_{n1}x_1+p_{n2}x_2+\ldots+p_{nn}x_n,\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

в которой уравнение, содержащее производную $\frac{dx_s}{dt}$, не содержит функций $x_{s'}$, для которых $s' > s$.

Относительно систем уравнений такого вида (в предположении, что коэффициенты $p_{s\sigma}$ удовлетворяют прежним условиям) докажется следующее предложение.

Теорема. *Для того чтобы система уравнений* (23) *была правильной, необходимо и достаточно, чтобы сумма характеристичных чисел функций*

$$e^{\int p_{ss}\,dt} \quad \text{и} \quad e^{-\int p_{ss}\,dt}$$

была равной нулю для всякого s.

Докажем сначала необходимость этого условия.

Для уравнений (23) находим следующую систему n независимых решений:

$$1)\ x_1 = e^{\int p_{11}\,dt}, \quad x_s = e^{\int p_{ss}\,dt} \int \sum_{i=1}^{s-1} p_{si} x_i e^{-\int p_{ss}\,dt}\,dt,$$

$$(s = 2, 3, \ldots, n),$$

$$2)\ x_1 = 0,\ x_2 = e^{\int p_{22}\,dt}, \quad x_s = e^{\int p_{ss}\,dt} \int \sum_{i=2}^{s-1} p_{si} x_i e^{-\int p_{ss}\,dt}\,dt,$$

$$(s = 3, 4, \ldots, n),$$

. . . .

$$n)\ x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = e^{\int p_{nn}\,dt}.$$

Чтобы остановиться на чем-либо определенном, будем предполагать, что здесь все интегралы

$$\int p_{ii}\,dt,$$

встречающиеся в показателях, обращаются в нуль при $t = t_0$. Что же касается остальных интегралов, то предположим их такими, чтобы в каком-либо k-ом решении функции

$$x_{k+1},\ x_{k+2}, \ldots,\ x_n$$

обращались при $t = t_0$ в некоторые данные постоянные

$$\alpha_{k\,1}, \alpha_{k\,2}, \ldots, \alpha_{k\,n-k}.$$

Тогда, если

$$x_{1\,k}, x_{2\,k}, \ldots, x_{n\,k}$$

есть k-ое решение рассматриваемой системы *в предположении, что все α равны нулю,* то для того же k-го решения, не делая этого предположения, найдем

$$x_s = x_{s\,k} + \alpha_{k\,1} x_{s\,k+1} + \alpha_{k\,2} x_{s\,k+2} + \ldots + \alpha_{k\,n-k} x_{s\,n},$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда на основании теоремы I предыдущего параграфа заключаем, что при надлежащем выборе постоянных рассматриваемая система решений будет нормальной.

Предполагая эти постоянные, таким образом, выбранными, обозначим характеристичные числа рассматриваемых решений соответственно через

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n.$$

Кроме того, обозначим

характеристичное число функции $e^{\int p_{s\,s}\,dt}$ через λ_s }
» » » $e^{-\int p_{s\,s}\,dt}$ » λ_s' } $(s=1,2,\ldots,n)$,
» » » $e^{\int \sum p_{s\,s}\,dt}$ » S,
» » » $e^{-\int \sum p_{s\,s}\,dt}$ » S'.

Очевидно будем иметь

$$\mu_s \leqslant \lambda_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому, если допустим, что система (23) есть правильная, что приведет к равенству

$$\sum \mu_s = S,$$

и заметим, что в силу леммы V сумма $\sum \lambda_s$ не может быть более S, то найдем

$$\sum \lambda_s = S.$$

Но вследствие того же допущения имеем

$$S + S' = 0.$$

Поэтому на основании леммы VII заключаем, что характеристичное число функции

$$e^{\int \sum p_{ss}\,dt} \quad e^{-\int p_{kk}\,dt}$$

равно $S + \lambda_k'$, и что, следовательно (лемма V),

$$S + \lambda_k' \geqslant \sum \lambda_s - \lambda_k,$$

откуда вследствие только что найденного равенства выводим

$$\lambda_k + \lambda_k' \geqslant 0.$$

Но сумма $\lambda_k + \lambda_k'$ не может быть положительной, а потому

$$\lambda_k + \lambda_k' = 0,$$

чем и доказывается необходимость высказанного в теореме условия.

Для доказательства достаточности этого условия поставим требования, которым должны удовлетворять постоянные α, несколько иначе. А именно, допустим, что постоянные эти выбраны таким образом, чтобы каждый интеграл вида

$$\int \sum_{i=1}^{s-1} p_{si}\, x_i\, e^{-\int p_{ss}\,dt}\, dt,$$

в котором характеристичное число подинтегральной функции положительно, с беспредельным возрастанием t стремился к нулю. Тогда в рассматриваемой системе решений каждый интеграл такого вида будет обладать характеристичным числом, не меньшим характеристичного числа подинтегральной функции (лемма VIII).

Поэтому, если допустим, что

$$\lambda_s + \lambda_s' = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и рассмотрим какое-либо k-ое решение (в котором $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ равны нулю), то, замечая, что в этом решении характеристичным числом функции x_k служит λ_k, легко убедимся, что характеристичные числа всех остальных входящих в него функций не меньше λ_k.

Отсюда следует, что λ_k есть характеристичное число k-го решения.

Но мы имеем вообще

$$\sum \lambda_s \leqslant S \leqslant -S' \leqslant -\sum \lambda_s',$$

а вследствие допущенного

$$\sum \lambda_s + \sum \lambda_s' = 0.$$

Поэтому получаем равенство

$$\sum \lambda_s + S' = 0,$$

из которого выводим, 1) что система уравнений (23) есть правильная и 2) что найденная для нее система решений есть нормальная.

Примечание. На основании леммы VI выраженное в теореме условие равносильно следующему: ***каждая из функций***

$$\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} p_{ss}\,dt, \qquad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

(а если бы коэффициенты p_{ss} были комплексными величинами, то вещественная часть каждой из этих функций) *с беспредельным возрастанием t должна приближаться к некоторому пределу.*

10

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ суть всевозможные различные характеристичные числа решений уравнений (15), и пусть n_s есть число решений, обладающих характеристичным числом λ_s, *в нормальной системе.* Мы условимся при этом говорить, что *система этих уравнений* обладает

n_1 характеристичными числами, равными λ_1,
n_2 » » » λ_2,
. . . .
n_k » » » λ_k.

Таким образом, всякой системе n линейных дифференциальных уравнений рассматриваемого вида будет соответствовать группа n характеристичных чисел, между которыми могут быть и равные.

Пусть система уравнений (15) преобразовывается при помощи линейной подстановки

$$z_s = q_{s1} x_1 + q_{s2} x_2 + \ldots + q_{sn} x_n, \qquad (x = 1, 2, \ldots, n),$$

обладающей следующими свойствами: все коэффициенты $q_{s\sigma}$ суть непрерывные и ограниченные функции t, их первые производные суть функции такого же характера, и величина, обратная составленному из этих коэффициентов определителю, есть ограниченная функция t.

При таком преобразовании коэффициенты в преобразованных уравнениях будут обладать теми же основными свойствами, что и в первоначальных.

Нетрудно доказать, что *группа характеристичных чисел преобразованной системы уравнений всегда будет тож-*

дественной с группой характеристичных чисел первоначальной.

В самом деле, по свойству рассматриваемой подстановки не только ее коэффициенты, но и коэффициенты обратной подстановки суть ограниченные функции t.

Поэтому если при посредстве соотношений между функциями x и функциями z из какого-либо решения одной системы уравнений выведем решение другой, то оба эти решения будут обладать одним и тем же характеристичным числом. А отсюда (в силу понятия о нормальной системе решений) следует, что всякое число, встречающееся известное число раз в группе характеристичных чисел одной системы уравнений, необходимо встретится такое же число раз и в группе характеристичных чисел другой.

Таким образом, характеристичные числа системы линейных дифференциальных уравнений по отношению к рассматриваемым преобразованиям обладают свойствами инвариантов. Теми же свойствами по отношению к этим преобразованиям обладают и характеристичные числа функций

$$e^{\int \sum p_{ss} dt} \quad \text{и} \quad e^{-\int \sum p_{ss} dt}.$$

Поэтому преобразованная система уравнений всегда будет того же рода (т. е. правильная или неправильная), как и первоначальная.

Система уравнений (15) может быть такова, что подстановкой рассматриваемого характера, надлежащим образом выбранной, ее можно преобразовать в систему уравнений с постоянными коэффициентами.

В этом случае систему уравнений (15) мы назовем *приводимой.*

Из замеченного сейчас следует, что приводимыми могут быть только правильные системы уравнений.

Мы покажем далее (глава III), что всякая система уравнений (15), в которой все коэффициенты суть периодиче-

ские функции t с одним и тем же вещественным периодом, есть приводимая.

Рассмотрим какую-либо систему (15).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть все ее характеристичные числа (между ними могут быть и равные), и пусть

$$\begin{array}{l} x_{11},\ x_{21},\ \ldots,\ x_{n1}, \\ x_{12},\ x_{22},\ \ldots,\ x_{n2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{1n},\ x_{2n},\ \ldots,\ x_{nn} \end{array}$$

есть найденная для нее нормальная система решений, в которой j-ое решение обладает характеристичным числом λ_j.

Обозначая через Δ определитель, составленный из функций x_{ij}, допустим, что все функции

$$\frac{e^{-\sum\limits_{s=1}^{n}\lambda_s t}}{\Delta}, \quad x_{ij}\, e^{\lambda_j t}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

суть ограниченные.

Можно показать, что при этом условии система уравнений (15) есть приводимая.

В самом деле, обозначая минор определителя Δ, соответствующий элементу x_{ij}, через Δ_{ij}, из предыдущего условия выводим, что все функции

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\, e^{-\lambda_j t}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

суть ограниченные. Такими же будут поэтому и их первые производные по t, ибо известно, что функции

$$\frac{\Delta_{1j}}{\Delta},\ \frac{\Delta_{2j}}{\Delta},\ \ldots,\ \frac{\Delta_{nj}}{\Delta}$$

при всяком j удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений, *присоединенной* (adjoint) к системе (15).

Поэтому подстановка

$$z_s = \frac{\Delta_{1s}}{\Delta} e^{-\lambda_s t} x_1 + \frac{\Delta_{2s}}{\Delta} e^{-\lambda_s t} x_2 + \ldots + \frac{\Delta_{ns}}{\Delta} e^{-\lambda_s t} x_n, \qquad (s=1, 2, \ldots, n),$$

обладает всеми свойствами рассматриваемых здесь подстановок, а при помощи нее система (15) преобразовывается в систему уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} + \lambda_s z_s = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

с постоянными коэффициентами [9].

О некотором общем случае дифференциальных уравнений возмущенного движения

11

Обращаемся теперь к уравнениям (1).

Рассматривая попрежнему только вещественные значения t, не меньшие некоторого предела t_0, будем предполагать в этих уравнениях все коэффициенты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$, непрерывными и ограниченными вещественными функциями t. Притом будем предполагать, что могут быть найдены такие положительные постоянные M и A, при которых для рассматриваемых значений t будут справедливы неравенства

$$|P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}| < \frac{M}{A^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}.$$

Допустим, что система дифференциальных уравнений, соответствующая первому приближению, есть правильная, и что

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

суть характеристичные числа этой системы.

Мы покажем, что, выбирая из этих чисел какие-либо k

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \qquad (24)$$

можно составить формально удовлетворяющие уравнениям (1) и содержащие k постоянных произвольных

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

ряды следующего вида:

$$x_s = \sum L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} e^{-\sum_{i=1}^{k} m_i \lambda_i t}, \quad (s=1, 2, \ldots, n), \quad (25)$$

где $L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ суть независящие от постоянных α_i непрерывные функции t, характеристичные числа которых не менее нуля, причем суммирование распространяется на все целые неотрицательные значения чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$, подчиненные условию

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k > 0.$$

Мы будем затем исключительно рассматривать тот случай, когда выбранные характеристичные числа (24) все положительны, и в этом предположении покажем, что при всяких $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, модули которых не превосходят некоторого предела, ряды (25) будут абсолютно сходящимися и представят функции, действительно удовлетворяющие уравнениям (1) для всех значений t, превосходящих t_0.

Обращаемся к формулам п. 3.

Допустим, что система частных решений уравнений (6), которой мы там пользовались, есть нормальная и что решение

$$x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}$$

обладает характеристичным числом

$$\lambda_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Полагаем

$$x_s^{(1)} = \alpha_1 x_{s1} + \alpha_2 x_{s2} + \ldots + \alpha_k x_{sk}, \qquad (s=1, 2, \ldots, n),$$

Затем интегрируем системы уравнений (7), соответствующие $m=2, 3, \ldots$.

В п. 3 мы при этом предполагали, что все функции $x_s^{(m)}$, для которых $m>1$, должны обращаться в нуль при $t=t_0$. Здесь больше не будем удерживать этого предположения, а взамен того примем следующее правило.

Допустим, что все функции $x_s^{(\mu)}$, для которых $\mu<m$, найдены и представляют относительно постоянных α_i целые однородные фукции μ-ой степени. Тогда функции $R_i^{(m)}$, по свойству своих выражений через величины $x_s^{(\mu)}$, представятся относительно тех же постоянных под видом целых однородных функций m-ой степени.

Пусть

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} = \sum T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k},$$

где T суть функции t, не зависящие от постоянных α_s.

Тогда, делая

$$x_s^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} dt,$$

$$\int \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} dt = \sum \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} \int T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt,$$

каждый из интегралов

$$\int T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt,$$

в котором подинтегральная функция обладает положительным характеристичным числом, будем брать в пределах от $+\infty$ *до* t. Что же касается тех, для которых характеристичные числа подинтегральных функций отрицательны или нули, то, вообще делая

$$\int T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt = \int_{t_0}^{t} T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt + C_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)},$$

будем только предполагать, что постоянным C приписываются какие-либо независящие от постоянных α_s определенные значения.

Рассматриваемые интегралы будут при этом обладать характеристичными числами, не меньшими характеристичных чисел соответствующих подинтегральных функций (лемма VIII).

Руководствуясь сказанным правилом, начиная от $m=2$, для всех $x_s^{(m)}$ получим выражения, целые и однородные относительно постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Пусть в этом предположении составлены ряды

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + \ldots, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Желая придать им вид (25), мы должны будем сделать

$$L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = e^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \lambda_i t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt.$$

Отсюда нетрудно заключить, что характеристичные числа функций $L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ не меньше нуля.

В самом деле, вследствие сделанного допущения, что система уравнений (6) есть правильная, характеристичное число функции $\frac{1}{\Delta}$ равно

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n);$$

а потому характеристичное число функции $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ не меньше $-\lambda_j$.

Вследствие этого, если допустим, что сейчас сказанное относительно функции L справедливо для всех тех из них, для которых

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k < m,$$

то по свойству величин $R_i^{(m)}$ заключим (леммы IV, V), что характеристичное число функции $T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$, для которой

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m,$$

а следовательно и характеристичное число интеграла

$$\int T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt$$

не меньше

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_k \lambda_k - \lambda_j.$$

Отсюда же выведем, что характеристичное число всякой функции L, для которой сумма значков m_i равна m, не меньше нуля.

Поэтому рассматриваемое свойство функций L, будучи справедливым в случае $\sum m_i = 1$, справедливо вообще.

Примечание. Чтобы придти к такому результату, очевидно нет надобности при составлении рядов (25) интегрировать в пределах от $+\infty$ до t непременно каждую из функций $T_{ij}^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ с положительным характеристичным числом. Достаточно интегрировать в таких пределах только те из них, для которых

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_k \lambda_k - \lambda_j > 0.$$

12

Переходя теперь к вопросу о сходимости рядов (25), будем предполагать, что все взятые для составления их характеристичные числа (24) положительны.

При этом для упрощения исследования примем $t_0 = 0$.

Тогда докажется следующее предложение.

Теорема. *Если, разумея под* ε *некоторую положительную постоянную, сделаем*

$$\alpha_s e^{-(\lambda_s - \varepsilon) t} = q_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

и величины α_s в рядах (25) заменим следующими отсюда их выражениями, то получим новые ряды

$$x_s = \sum Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), (26)$$

расположенные по восходящим степеням величин q_s, которые будут такого свойства, что при всяком ε, как бы оно мало ни было, найдутся такие положительные постоянные $Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$, при которых для всех неотрицательных значений t будут справедливы неравенства

$$| Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} | < Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)},$$

а ряд

$$\sum Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k} \qquad (27)$$

будет абсолютно сходящимся, пока модули величин q_s не превосходят некоторого отличного от нуля предела q.

Будем рассматривать только такие положительные значения ε, которые меньше каждого из чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k.$$

Тогда найдется такое целое положительное число l, что все выражения

$$m_1(\lambda_1 - \varepsilon) + m_2(\lambda_2 - \varepsilon) + \ldots + m_k(\lambda_k - \varepsilon) - \lambda_j + \varepsilon,$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

при всяких целых неотрицательных $m_1, m_2, \ldots, m_k$, удовлетворяющих условию

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k \geqslant l,$$

будут больше некоторой произвольно заданной положительной величины H.

Пусть η есть некоторая положительная постоянная, меньшая ε.

Все функции

$$Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} e^{\eta t} = L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} e^{-[(m_1+m_2+\ldots+m_k)\varepsilon-\eta]t} \tag{28}$$

будут исчезающими. Поэтому для модуля каждой из них может быть назначен некоторый постоянный высший предел, годный для всех положительных значений t.

Пусть такие пределы, которые притом предположим независящими от s и обозначим через $Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$, найдены для всех тех из них, для которых

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k < l.$$

Между ними будут между прочим функции

$$x_{ij} e^{(\lambda_j - \varepsilon + \eta)t}.$$

Если же предположим еще $\eta > \frac{\varepsilon}{2}$, то и для модулей функций

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} e^{-(\lambda_i + 2\eta - \varepsilon)t}$$

найдутся подобные высшие пределы.

Пусть K и K' суть такие постоянные, что

$$|x_{ij}| e^{(\lambda_i - \varepsilon + \eta)t} < K, \quad \left|\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\right| e^{-(\lambda_i + 2\eta - \varepsilon)t} < K'$$

для всяких i и j, взятых из ряда 1, 2, 3, ..., n, и для всякого положительного t.

Для определения высших пределов модулей тех из величин (28), для которых сумма значков m_1, m_2, ..., m_k не меньше l, обращаемся к формулам

$$x_s^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int_{\infty}^{t} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} dt, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{29}$$

в которых, согласно принятому нами правилу, все интегрирования производятся в пределах от $+\infty$ до t, ибо при $m \geqslant l$ характеристичные числа всех подинтегральных функций будут положительны.

Пусть

$$R_i^{(m)} = \sum R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k} \qquad (m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m),$$

где $R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ суть величины, не зависящие от постоянных α_s.

Тогда, полагая для сокращения

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_k \lambda_k - m\varepsilon = N,$$

из (29) выведем

$$Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = -e^{Nt} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int_t^{\infty} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} e^{-Nt} R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} dt. \qquad (30)$$

Допустим, что, пользуясь такими формулами, мы нашли годные для всех положительных значений t высшие пределы модулей всех величин

$$Q_s^{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)}, \qquad (31)$$

для которых сумма значков $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ меньше m, и что эти пределы и для случаев, когда

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k \geqslant l,$$

получены нами под видом

$$e^{-\eta t} Q^{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)},$$

где $Q^{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)}$ суть постоянные величины.

При помощи этих пределов составим высшие пределы модулей для всех $R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$, фигурирующих в формулах (30),

Для этого замечаем, что по свойству выражений $R_i^{(m)}$ величина $R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ представляет целую функцию m-ой степени от тех из величин (31), для которых сумма значков μ_s меньше m, а коэффициенты в ней суть линейные формы с положительными коэффициентами тех из величин

$$P_i^{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)}, \tag{32}$$

для которых сумма значков $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ не больше m. Притом относительно величин (31) степень каждого члена этой функции не ниже второй.

Отсюда следует, что если $R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ есть постоянная, в которую обращается каждая из функций

$$R_1^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}, R_2^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}, \ldots, R_n^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$$

после замены в ней величины (32) некоторыми независящими от t высшими пределами их числовых значений для всех положительных значений t, а величин (31) величинами $Q^{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)}$, то для всех таких значений t будут справедливы неравенства

$$|R_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}| < e^{-2\eta t} R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}.$$

Вторые части их и примем за искомые высшие пределы.

Пользуясь всеми найденными высшими пределами, выведем из (30) следующее неравенство:

$$|Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}| <$$
$$< nKK' R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} e^{Nt} \sum_{j=1}^{n} e^{-(\lambda_j - \varepsilon + \eta) t} \int_t^{\infty} e^{-(N - \lambda_j + \varepsilon) t} dt,$$

справедливое для всякого положительного t. Замечая, что

$$N - \lambda_j + \varepsilon = m_1(\lambda_1 - \varepsilon) + m_2(\lambda_2 - \varepsilon) + \ldots,$$
$$\ldots + m_k(\lambda_k - \varepsilon) - \lambda_j + \varepsilon > H,$$

и что следовательно

$$\int_t^\infty e^{-(N-\lambda_j+\varepsilon)t}dt < \frac{1}{H}e^{-(N-\lambda_j+\varepsilon)t},$$

можем заменить это неравенство следующим

$$|Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}| < \frac{n^2 KK'}{H} R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} e^{-\eta t}.$$

Отсюда заключаем, что можно положить

$$Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = \frac{n^2 KK'}{H} R^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$$

для всяких $m_1, m_2, \ldots m_k$, сумма которых не меньше l.

Но выбирая достаточно большие величины для K и K' или достаточно малую величину для H, очевидно можем достигнуть того, что величины Q, определяемые по этой формуле для значков, удовлетворяющих условию

$$1 < m_1 + m_2 + \ldots + m_k < l,$$

будут не меньше тех, которые мы нашли для них раньше.

Поэтому, заменяя последние, если это необходимо, бо́льшими величинами и означая через G некоторую достаточно большую положительную постоянную, можем сделать

$$Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = GR^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \tag{33}$$

для всяких $m_1, m_2, \ldots, m_k$, сумма которых больше 1. Для тех же, сумма которых равна 1, можем положить

$$Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} = K.$$

Обозначим сумму

$$\sum Q^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k},$$

распространенную на все целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$, удовлетворяющие условию

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m,$$

через $x^{(m)}$. Тогда для $m > 1$ равенство (33) приведет к следующему:

$$x^{(m)} = GR^{(m)},$$

где $R^{(m)}$ есть то, во что обращается $R_i^{(m)}$ после замены величин $x_s^{(\mu)}$ величинами $x^{(\mu)}$ и величин (32) вышепринятыми высшими пределами. При этом ряд

$$x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \ldots, \qquad (34)$$

расположенный по восходящим степеням величин q_s, будет обладать членами, модули которых больше модулей соответственных членов каждого из рядов (26) для всякого положительного t (они будут даже больше этих модулей, умноженных на $e^{\eta t}$).

Но ряд (34) можно рассматривать как расположенный по восходящим степеням величины

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k,$$

и если, согласно замеченному в предыдущем параграфе, за высший предел числовых значений величин (32) примем следующую

$$\frac{M}{A^{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}},$$

то ряд этот, по существу, не будет отличаться от того, к исследованию которого привелся вопрос в п. 4.

Поэтому если остановимся на такой гипотезе, то наверно найдется такая положительная величина q, что для всяких $q_1, q_2, \ldots, q_k$, удовлетворяющих условиям

$$|q_s| \leqslant q, \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

ряд (34) будет абсолютно сходящимся.

Теорема, следовательно, доказана.

Следствие. *Можно найти такую положительную постоянную α, что при всяких $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, удовлетворяющих условиям*

$$|\alpha_s| \leqslant \alpha, \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

и для всякого неотрицательного t ряды (25) будут абсолютно сходящимися, представляя притом непрерывные функции t.

Что функции эти удовлетворяют уравнениям (1), докажется так же, как в п. 4.

Примечание.* Если система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная, то обозначая через S сумму всех ее характеристичных чисел, а через μ характеристичное число функции $\frac{1}{\Delta}$, будем иметь

$$S + \mu = -\sigma,$$

где σ — некоторое положительное число.

В этом случае характеристичное число функции

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$$

не меньше $-\lambda_j - \sigma$. А на основании этого нетрудно доказать, что если для рассматриваемого случая по правилу, изложенному в предыдущем параграфе, составить ряды, подобные (25), то характеристичное число функции

$$L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$$

будет не меньше

$$-(m_1 + m_2 + \ldots + m_k - 1)\sigma,$$

Допустим, что σ меньше каждого из чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k.$$

Тогда надлежащим выбором чисел ε и η можно будет удовлетворить всем неравенствам

$$\lambda_s > \varepsilon > \eta > \frac{\varepsilon + \sigma}{2}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

А при выполнении последних будут выполнены и все условия предыдущего доказательства, в чем легко убедимся, принимая в расчет только что указанное свойство функций L.

Поэтому теорема будет справедлива и в случае, когда система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная, но каждое из характеристичных чисел, взятых для составления рядов (25), больше σ, — если только условие $\varepsilon > 0$ заменим в ней условием $\varepsilon > \sigma$.

13

Из доказанного могут быть выведены следующие теоремы:

Теорема I. *Если система дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и если все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение устойчиво.*

При сказанном условии можно принять $k = n$.

Тогда, называя значения функций x для $t = 0$ через a_s и полагая в уравнениях (25) $t = 0$, найдем

$$a_s = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где f_s суть голоморфные функции величин α_j, обращающиеся в нуль при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

и притом такие, что функциональный определитель их в отношении величины α_j не обращается в нуль, когда все α_j сделаем равными нулю (ибо он принимает при этом значение определителя Δ для $t=0$).

Поэтому предыдущие уравнения разрешимы относительно величин α_j, и когда величины a_s численно достаточно малы, мы можем из них вывести

$$\alpha_s = \varphi_s(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (s=1,2,\ldots,n), \tag{35}$$

где φ_s суть голоморфные функции величин a_j, обращающиеся в нуль при

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Пусть x есть произвольно малая положительная величина.

Мы можем найти такую положительную величину r, что для всех значений переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, удовлетворяющих условиям

$$|q_s| \leqslant r, \qquad (s=1,2,\ldots,n),$$

ряд (27) (относящийся к предположению, что ε меньше каждого из характеристичных чисел) будет абсолютно сходящимся, а модуль его суммы будет меньше x.

Затем можем найти такую положительную величину a, что для всех значений величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условиям

$$|a_s| \leqslant a, \qquad (s=1,2,\ldots,n), \tag{36}$$

модули величин α_s, определяемых уравнениями (35), не будут превосходить величины r.

Тогда можем быть уверены, что если начальные обстоятельства возмущенного движения выбраны согласно условиям (36), то в течение всего последующего времени движения будут выполняться условия

$$|x_s| < x, \qquad (s=1,2,\ldots,n),$$

а этим и доказывается теорема.

Примечание. При условии предыдущей теоремы во всяком возмущенном движении, достаточно близком к невозмущенному, все функции x_s с беспредельным возрастанием t стремятся к нулю. Это обстоятельство мы будем выражать, говоря, что *возмущенное движение* (поскольку оно определяется выражениями величин x_s в функциях t) *асимптотически приближается к невозмущенному.*

Далее мы будем часто говорить также о движениях, асимптотически приближающихся к какому-либо данному движению. После замеченного сейчас, значение такого выражения не требует особых разъяснений.

Теорема II. *Если система дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная, а в группе ее характеристичных чисел находятся положительные, то невозмущенное движение всегда обладает известной условной устойчивостью. А именно, если число положительных характеристичных чисел есть k, то для устойчивости достаточно, чтобы начальные значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неизвестных функций удовлетворяли некоторым $n-k$ уравнениям вида*

$$F_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-k),$$

где F_j суть голоморфные функции величин a_s, уничтожающиеся при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Уравнения эти таковы, что позволяют выражать все a_s как вещественные голоморфные функции некоторых k вещественных независимых величин.

Будем предполагать все функции, входящие в состав нормальной системы решений уравнений (6), которой мы пользовались для составления рядов (25), вещественными.

Тогда вычисления можно вести так, что все коэффициенты L в уравнениях (25) также будут вещественными, и, следовательно, уравнениями этими при вещественных α.

будет определяться некоторое вещественное решение системы уравнений (1).

Допуская это и делая в уравнениях (25) $t=0$, найдем

$$a_s = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \qquad (s=1,2,\ldots,n),$$

где f_s суть вещественные голоморфные функции величин α_j, обращающиеся в нуль, когда все α_j полагаются равными нулю. Притом функции эти таковы, что между функциональными определителями, которые можно из них составить, комбинируя их по k, найдется по крайней мере один, который не будет обращаться в нуль, когда сделаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0,$$

ибо при этом определители эти обращаются в значения, соответствующие $t=0$, миноров определителя Δ, составленных из элементов его первых k строк.

Вследствие этого из предыдущих уравнений при достаточно малых $|a_s|$ можем вывести следующее:

$$\alpha_j = \varphi_j(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (j=1,2,\ldots,k),$$
$$F_s(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \qquad (s=1,2,\ldots,n-k), \quad (37)$$

где φ_j, F_s суть некоторые голоморфные функции величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$, обращающиеся в нуль, когда последние все делаются равными нулю.

Дальнейший ход доказательства будет тот же, что и для предыдущей теоремы, с тою только разницей, что здесь мы должны иметь в виду $n-k$ уравнений (37), связывающих величины a_s.

Можно заметить, что при всяких численно достаточно малых возмущениях, удовлетворяющих условиям (37), возмущенные движения будут асимптотически приближаться к невозмущенному.

Примечание. Если система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная,

но имеет k характеристичных чисел, бóльших величины σ (12, примечание), то найдется $n-k$ подобных предыдущим условий для возмущений, при которых невозмущенное движение будет устойчивым [10].

Некоторые общие предложения

14

Переходя теперь к изложению оснований второго метода, прежде всего обратим внимание на некоторые общие заключения, которые могут быть выведены из изложенного в пп. 3 и 4.

Как и в предыдущем отделе, мы будем здесь рассматривать уравнения (1) исключительно в предположении, что для функций A_s, о которых шла речь в пп. 2 и 4, при значениях t, больших его начального значения t_0, может быть назначен некоторый положительный низший предел A.

В этом предположении, обозначая через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ какие-либо постоянные, выбранные согласно неравенствам

$$|a_s| < A, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

рассмотрим функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (1) и принимающие значения a_s для $t = t_0$.[1]

На основании изложенного мы можем утверждать, что такие функции по крайней мере для значений t, достаточно близких к t_0, всегда найдутся и выйдут вещественными

[1] Заданием постоянных a_s функции x_s определяются вполне, по крайней мере для достаточно близких к t_0 значений t. Это выводится из легко доказываемого предложения, состоящего в том, что система (1), кроме очевидного решения

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

не может иметь другого, в котором начальные значения всех неизвестных функций были бы равны нулю.

всякий раз, когда такими выбраны все a_s (это мы и будем здесь предполагать), и что притом всегда найдется такой предел t_1, больший t_0, чтобы в промежутке от t_0 до t_1 включительно функции эти представлялись рядами, расположенными по целым положительным степеням постоянных a_s.

Если определяемые этими рядами функции при $t = t_1$ удовлетворяют неравенствам

$$|x_s| < A, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

то для них, конечно, возможны будут аналитические продолжения и за предел t_1, представляемые подобными же рядами, расположенными по степеням значений этих функций для $t = t_1$.

Эти новые выражения функций x_s вообще будут справедливы только для значений t, не превосходящих некоторого предела t_2, но если при $t = t_2$ неравенства (38) остаются выполненными, для наших функций будет возможно дальнейшее продолжение под видом некоторых новых рядов такого же характера.

Таким образом, исходя из данных начальных значений a_s, можно будет следить за непрерывным изменением наших функций при непрерывном возрастании t по крайней мере до тех пор, пока не нарушаются неравенства (38).

Может случиться, что при каком-либо выборе постоянных a_s неравенства эти будут выполняться для всех значений t, бóльших t_0. Тогда функции x_s определятся для всех таких значений t.

В других случаях для t будет существовать некоторый высший предел t', при котором по крайней мере одно из неравенств (38) перейдет в равенство.

Аналитическое продолжение наших функций за такой предел t' потребовало бы, конечно, особого исследования. Но нам входить в него не представится надобности, так как для нашей цели будет достаточно рассматривать всякое

возмущенное движение только до тех пор, пока величины $|x_s|$ не превосходят каких-либо данных, отличных от нуля пределов.

Во всяком случае, постоянные a_s всегда можно будет выбрать настолько численно малыми, чтобы наши аналитические выражения функций x_s годились для всех значений t, лежащих между t_0 и T, как бы велико ни было данное число T, и чтобы значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ этих функций для $t = T$ были все сколь угодно численно малыми. Притом, если бы мы пожелали определять функции x_s их значениями ξ_s для $t = T$, то как бы велико ни было T, все ξ_s всегда можно было бы выбрать настолько численно малыми, чтобы этим значениям соответствовала одна определенная система начальных значений a_s, и чтобы последние были все сколь угодно численно малыми.

Из этого последнего замечания следует, что при решении вопросов об устойчивости достаточно будет рассматривать только значения t, бóльшие сколь угодно большого предела T, и заменять рассмотрение начальных значений функций x_s рассмотрением их значений, соответствующих $t = T$.

Мы будем далее рассуждать о функциях x_s только до тех пор, пока не нарушаются неравенства (38). Поэтому, говоря о каких-либо пределах для величин $|x_s|$, эти пределы всегда будем предполагать меньшими A.

15

Мы будем здесь рассматривать вещественные функции вещественных переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \tag{39}$$

подчиненных некоторым условиям вида

$$t \geqslant T, \quad |x_s| \leqslant H, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{40}$$

где T и H суть постоянные, из которых вторая всегда будет предполагаться отличной от нуля.

Притом мы будем рассуждать только о функциях, которые при условии (40) остаются непрерывными и однозначными и *уничтожаются при*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Такими свойствами будут обладать все рассматриваемые нами функции (хотя бы об этом и не было упомянуто). Но кроме того они могут обладать более специальными свойствами, для обозначения которых мы введем некоторые термины.

Пусть рассматривается функция V, которая такова, что при условиях (40), если в них T сделать достаточно большим, а H достаточно малым, она может получать, кроме равных нулю, только значения одного какого-либо знака. Такую функцию будем называть *знакопостоянной.* Когда же пожелаем указать на ее знак, то будем говорить, что это есть функция положительная или отрицательная.

Притом, если функция V не зависит от t, а постоянная H может быть выбрана достаточно малой для того, чтобы при условиях (40) равенство $V=0$ могло иметь место только для одной системы значений переменных

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

то функцию V будем называть *знакоопределенной,* а желая обратить внимание на ее знак, — *определенно-положительной* или *определенно-отрицательной.*

Последними терминами мы будем пользоваться также и по отношению к функциям, зависящим от t. Но в этом случае функцию V будем называть знакоопределенной только при условии, если для нее возможно найти такую независящую от t определенно-положительную функцию W, при которой одно из двух выражений

$$V - W \text{ или } -V - W$$

представляло бы функцию положительную [11].

Так каждая из функций

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos t, \quad t(x_1^2+x_2^2)-2x_1x_2\cos t$$

есть знакопостоянная. Но первая есть только знакопостоянная, а вторая, если $n=2$, есть в то же время знакоопределенная.

Всякую функцию V, для которой постоянная H может быть выбрана настолько малой, чтобы для числовых значений этой функции при условиях (40) существовал некоторый высший предел, мы будем называть *ограниченной.*

В силу свойств, которыми по нашему предположению обладают все рассматриваемые нами функции, такой будет например всякая независящая от t функция.

Ограниченная функция может быть такова, что для всякого положительного ε, как бы оно мало ни было, найдется такое отличное от нуля число h, при котором для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям

$$t\geqslant T, \quad |x_s|\leqslant h, \qquad (s=1,2,\ldots,n),$$

будет выполняться следующее

$$|V|\leqslant\varepsilon.$$

Этому требованию удовлетворяет, например, всякая независящая от t функция. Но функции, зависящие от t, хотя бы и ограниченные, могут ему не удовлетворять. Такой случай представляется, например, для функции

$$\sin[(x_1+x_2+\ldots+x_n)t].$$

Когда для функции V предыдущее требование выполнено, мы будем говорить, что она *допускает бесконечно малый высший предел.*

Такова например функция

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\sin t.$$

Пусть V есть функция, допускающая бесконечно малый высший предел Тогда, если нам известно, что переменные удовлетворяют условиям

$$t \geqslant T, \quad |V| \geqslant l,$$

где l есть некоторое положительное число, то отсюда заключим, что найдется некоторое другое положительное число λ, меньше которого не может быть наибольшая из величин $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$.

Одновременно с функцией V мы будем часто рассматривать выражение

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t},$$

представляющее ее полную производную по t, взятую в предположении, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть функции t, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения.

В таких случаях всегда будем предполагать функцию V такой, чтобы V' как функция переменных (39) обладала всеми свойствами вообще рассматриваемых нами здесь функций

Говоря далее о производной функции V, будем подразумевать, что речь идет о только что названной полной производной

16

Всем известна теорема Лагранжа об устойчивости равновесия при существовании силовой функции и изящное доказательство, предложенное для нее Лежен-Дирихле (Lejeune-Dirichlet).[1] Последнее основывается на соображениях, которые могут служить для доказательства многих подобных теорем.

---

[1] Mécanique analytique de Lagrange, 3 ou 4 édition. Tome I, note II.

Руководствуясь такими соображениями, мы докажем здесь следующие предложения:

Теорема I. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой V' в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Допустим, что найденная функция V определенно-положительна, а производная ее V' представляет отрицательную функцию или тождественно равна нулю.

Тогда найдутся такие постоянные T и H, при которых для всех значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, удовлетворяющих условиям $t \geqslant T$ и

$$|x_s| \leqslant H, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{41}$$

будет выполняться следующее:

$$V' \leqslant 0, \quad V \geqslant W, \tag{42}$$

где W есть некоторая независящая от t положительная функция переменных x_s, не обращающаяся при условиях (41) в нуль иначе, как для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Рассматривая величины x_s как функции t, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения, допустим, что значения ξ_s этих функций для $t = T$ удовлетворяют условиям (41) со знаками неравенства. Тогда в силу непрерывности этих функций условия (41) будут выполняться по крайней мере для всех достаточно близких к T значений t

Будем рассматривать только такие значения последнего, которые не меньше T.

Тогда, называя значение функции V для $t = T$ через V_0, из уравнения

$$V - V_0 = \int_T^t V' dt \tag{43}$$

выведем, что если в промежутке от T до t условия (41) постоянно выполняются, то в том же промежутке функции x_s наверно будут удовлетворять условию

$$W \leqslant V_0, \tag{44}$$

вторую часть которого, делая все ξ_s численно достаточно малыми, можно сделать сколь угодно малой.

Обозначим через x наибольшую из величин $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$, а через ε некоторое отличное от нуля, но произвольно малое положительное число (которое во всяком случае будем предполагать меньшим H), и рассмотрим всевозможные системы значений величин x_s, удовлетворяющие условию

$$x = \varepsilon. \tag{45}$$

Пусть l есть *точный* низший предел функции W (как функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$) при этом условии.

Число l необходимо будет отличным от нуля и положительным, ибо функция W по своему характеру не может делаться при условии (45) ни отрицательной ни равной нулю, а l в силу ее непрерывности необходимо будет одним из значений, которые она при этом условии может принимать.

Поэтому всегда можно будет сделать

$$V_0 < l,$$

и притом всегда найдется такое отличное от нуля число λ, при котором неравенство это будет выполняться для всяких ξ_s, удовлетворяющих условиям

$$|\xi_s| \leqslant \lambda, \qquad (s = 1, 2 \ldots, n). \tag{46}$$

Установив это, допустим, что величины ξ_s действительно выбраны согласно условиям (46).

Так как число λ необходимо меньше ε, то функции x_s будут тогда удовлетворять неравенствам

$$|x_s| < \varepsilon, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (47)$$

для всех достаточно близких к T значений t.

Но, изменяясь с течением времени непрерывно, функции x_s не могут перестать удовлетворять этим неравенствам иначе, как достигнув предварительно некоторых значений, удовлетворяющих условию (45). Последнее же при $V_0 < l$ несовместно с условием (44).

Мы должны поэтому заключить, что каковы бы ни были ξ_s, удовлетворяющие условиям (46), функции x_s будут удовлетворять неравенствам (47) для всех значений t, больших T.

Таким образом, теорему нашу можем считать доказанной [12]. Как некоторый частный случай, из нее выводится тотчас же упомянутая выше теорема Лагранжа.

Примечание 1. Если бы для дифференциальных уравнений возмущенного движения было найдено несколько интегралов $U_1, U_2, \ldots, U_m$ (уничтожающихся, как и все рассматриваемые здесь функции, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) и если бы найденная функция V удовлетворяла условиям (42) (при прежнем значении буквы W) только для переменных, подчиненных кроме (40) еще условиям

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \ldots, \quad U_m = 0,$$

то мы заключили бы, что невозмущенное движение устойчиво по крайней мере для возмущений, не нарушающих этих последних условий.

В случае, когда функция V сама есть один из интегралов и когда функции $V, U_1, U_2, \ldots, U_m$ не зависят явным образом от t, в этом заключается предложение, на которое было указано Раузом.[1]

[1] Routh. The advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. 4 edition, 1884, p. 52, 53.

Примечание 2. Если функция V, удовлетворяя условиям теоремы, в то же время допускает бесконечно малый высший предел, а производная ее представляет знакоопределенную функцию, то можно доказать, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нему асимптотически.

С этой целью рассмотрим какое-либо возмущенное движение, которому соответствуют величины ξ_s, численно достаточно малые для того, чтобы условия (41) выполнялись во все время, следующее за моментом, когда $t=T$.

Легко убедиться, что если постоянная H достаточно мала, то при названных свойствах функции V (которую опять предположим определенно-положительною) нельзя найти такого положительного числа l, которое было бы меньше всех значений, получаемых функцией V в этом движении при $t>T$.

В самом деле, если бы такое число существовало, то по свойству V как функции переменных (39), допускающей бесконечно малый высший предел, мы нашли бы такое положительное число λ, при котором было бы $x>\lambda$ (если x попрежнему означает наибольшую из величин $|x_s|$) для всех значений t, превосходящих T. А тогда для функции $-V'$ при тех же значениях t существовал бы некоторый положительный низший предел l'.

Действительно функция $-V'$, согласно допущенному, есть определенно-положительная. Поэтому постоянные T и H всегда можно предположить такими, чтобы при $t \geqslant T$ и $x \leqslant H$ выполнялось условие $-V' \geqslant W'$, в котором W' есть некоторая независящая от t положительная функция переменных x_s, не уничтожающаяся при условии $x \leqslant H$ иначе, как для $x=0$. Но этот последний случай будет исключен, если переменные x_s, подчинить условию

$$\lambda \leqslant x \leqslant H.$$

Поэтому при последнем функция W' будет иметь некоторый положительный низший предел l'.

Но если при $t > T$ всегда выполняется условие $-V' > l'$, то из уравнения (43) выведем

$$V < V_0 - l'(t - T)$$

для всех превосходящих T значений t. А это невозможно, ибо первая часть неравенства есть положительная функция t, а вторая при достаточно большом t делается отрицательной.

Итак, как бы мало ни было число l, всегда наступит момент, когда функция V сделается меньшей l. А будучи убывающей функцией t, она затем всегда будет оставаться меньшей l.

Поэтому, как бы мало ни было положительное число ε, всегда наступит момент, когда функция V сделается и будет затем оставаться меньшей точного низшего предела функции W при условии

$$\varepsilon \leqslant x \leqslant H.$$

А начиная по крайней мере с этого момента, функции x_s будут всегда оставаться по числовым значениям меньшими ε.

Отсюда заключаем, что при всяких численно достаточно малых ξ_s функции x_s с беспредельным возрастанием t стремятся к нулю.

Теорема II. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной V', притом допускала бы бесконечно малый высший предел и была бы такова, чтобы при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно насколько угодно малых, ее можно было сделать величиной одинакового знака с ее производной,— то невозмущенное движение неустойчиво.*

Допустим, что найдена функция V, удовлетворяющая этим требованиям, и что производная ее V' определенно-положительна.

Для этой функции найдутся такие постоянные T и H, при которых для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям $t \geqslant H$ и

$$|x_s| \leqslant H, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{48}$$

будет выполняться следующее

$$V' \geqslant W, \quad |V| < L, \tag{49}$$

где L есть некоторая положительная постоянная, а W — не зависящая от t положительная функция переменных x_s, не уничтожающаяся при условиях (48) иначе, как при равенстве нулю всех x_s.

Тогда, предполагая, что значения ξ_s функций x_s для $t = T$ удовлетворяют условиям (48) со знаками неравенства, и называя значение функции V для того же t через V_0, из уравнения

$$V - V_0 = \int_T^t V' dt \tag{50}$$

выведем

$$V \geqslant V_0 \tag{51}$$

для всех значений t, превосходящих T и удовлетворяющих требованию, чтобы в промежутке от T до t условия (48) оставались постоянно выполненными.

Мы замечаем теперь, что по свойству функции V постоянную T можно предположить достаточно большой для того, чтобы надлежащим выбором величин ξ_s, удовлетворяющих условиям

$$|\xi_s| < \varepsilon, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

при всяком отличном от нуля, но сколь угодно малом положительном ε, постоянную V_0 можно было сделать положительной.

Если же V_0 — положительная величина, то по свойству V как функции, допускающей бесконечно малый высший предел, найдем такое положительное число λ, которое будет менее всех значений, возможных при условии (51) (когда в нем предполагается $t \geqslant T$) для наибольшей x из величин $|x_s|$. А тогда, если обозначим через l какое-либо положительное число, меньшее всех значений, возможных для функции W при условии

$$\lambda \leqslant x \leqslant H,$$

то из уравнений (50) выведем неравенство

$$V > V_0 + l(t - T), \tag{52}$$

которому будет удовлетворять функция V для $t > T$, если в промежутке от T до t условия (48) никогда не нарушаются

Но при тех же условиях функция V должна удовлетворять неравенству (49). А последнее может существовать совместно с неравенством (52) только при значениях t, меньших величины

$$\tau = T + \frac{L - V_0}{l}.$$

Поэтому, если неравенство (52) не должно нарушаться ранее условий (48), то в промежутке от T до τ наверно найдется такое значение t, начиная с которого (по крайней мере в течение известного промежутка времени) хотя одно из этих условий не будет выполняться,

Таким образом убеждаемся, что как бы мало ни было ε, которого по нашему желанию не должны превосходить числовые значения величин ξ_s, но если последние выбраны так, чтобы V_0 было положительным, то всегда наступит момент, когда по крайней мере одна из величин $|x_s|$ достигнет *неизменного* предела H. А этим и обнаруживается неустойчивость невозмущенного движения.

Пример 1. Пусть данная система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

где V есть независящая от t голоморфная функция величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, разложение которой начинается членами не ниже второго порядка.

В силу этих уравнений будем иметь

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2.$$

Поэтому всякий раз, когда V есть функция определенно-отрицательная, невозмущенное движение будет устойчивым. Напротив, движение это будет неустойчивым всякий раз, когда V не есть такая функция, если только мы не имеем дела с тем случаем, когда системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$$

возможно удовлетворить (не равными нулю одновременно) вещественными значениями величин x_s, насколько угодно численно малыми.

Последний случай будет сомнительным и потребует особого исследования.

Случай этот наверно не представится, если гессиан [определитель Гессе (Hesse)] функции V не обращается в нуль, когда сделаем

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Пример 2. Пусть система дифференциальных уравнений возмущенного движения есть $2k$-го порядка и имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'_s} - \frac{\partial F}{\partial x_s} = 0, \quad \frac{dx_s}{dt} = x_s', \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

где

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}x_i'^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}v_{ij}x_i'x_j'+U,$$

а $v_{ij}=v_{ji}$ и U суть независящие от t голоморфные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, обращающиеся в нуль, когда все эти переменные делаются равными нулю. Притом функция U такова, что разложение ее начинается членами не ниже второго порядка.

Эта система очевидно приводится к типу вообще рассматриваемых нами систем дифференциальных уравнений возмущенного движения.

Пусть

$$U=U_m+U_{m+1}+\ldots,$$

где вообще U_l обозначает целую однородную функцию l-ой степени величин $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Тогда, делая

$$V=x_1\frac{\partial F}{\partial x_1'}+x_2\frac{\partial F}{\partial x_2'}+\cdots+x_k\frac{\partial F}{\partial x_k'},$$

в силу наших уравнений, найдем

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{k}x_s\frac{\partial F}{\partial x_s}+\sum_{s=1}^{k}x_s'\frac{\partial F}{\partial x_s'}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}x_i'^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(v_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}x_s\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_s}\right)x_i'x_j'+mU_m+$$
$$+(m+1)U_{m+1}+\ldots.$$

Пусть U_m есть определенно-положительная функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (для чего, конечно, m должно быть числом четным).

Тогда это выражение $\frac{dV}{dt}$ будет определенно-положительной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1', x_2', \ldots, x_k'$, и все условия теоремы II будут выполнены. Поэтому заключим, что невозмущенное движение неустойчиво.

Рассматриваемый здесь случай может представиться например при исследовании устойчивости равновесия (в обычном смысле) при существовании силовой функции U.

Всякий раз, когда для положения равновесия силовая функция обращается в minimum, и это обнаруживается из исследования совокупности членов наинизшего порядка в разложении приращения этой функции по степеням приращений координат, мы заключим о неустойчивости равновесия [13].

Теорема III. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию V, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W, \tag{53}$$

где λ — положительная постоянная, а W — или тождественно равна нулю, или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае найденная функция V такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, насколько угодно численно малых, ее можно сделать величиною одинакового знака с W, — то невозмущенное движение неустойчиво.

Пусть найденная функция V, удовлетворяющая этим требованиям, такова, что W есть функция положительная.

По свойству функций V и W найдутся такие постоянные T и H, при которых для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям $t \geqslant T$ и

$$|x_s| \leqslant H, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{54}$$

будет выполняться следующее

$$|V| < L, \quad W \geqslant 0,$$

где L — некоторая положительная постоянная. Притом постоянную T можем предположить достаточно большой для того, чтобы надлежащим выбором значений ξ_s функций x_s для $t = T$, насколько угодно численно малых, соответствующее значение V_0 функции V можно было сделать положительным.

Рассматривая только не меньшие T значения t, из уравнения (53) выведем

$$\frac{dV}{dt} - \lambda V \geqslant 0$$

для всех значений t, при которых условия (54) остаются выполненными.

Поэтому, если от T до t условия эти постоянно выполняются, будем иметь

$$V \geqslant V_0 e^{\lambda(t-T)}$$

и следовательно

$$L > V_0 e^{\lambda(t-T)}.$$

Но при положительном V_0 последнее неравенство может иметь место только для значений t, меньших величины

$$\tau = T + \frac{1}{\lambda} \log \frac{L}{V_0}.$$

Поэтому в промежутке от T до τ условия (54) не могут постоянно выполняться.

Отсюда так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, заключаем, что невозмущенное движение неустойчиво.

Подобным же образом докажется теорема и в случае, когда $W = 0$ тождественно.

Варьируя условия, которым должны удовлетворить искомые функции, можно было бы, конечно, предложить и множество других теорем, подобных доказанным. Но для приложений, которые мы имеем в виду, последние совершенно достаточны. Поэтому ими и ограничиваемся [14].

Примечание. До сих пор мы предполагали, что для переменных x_s возможны всякие вещественные величины, численно достаточно малые. Но могут встретиться случаи, когда, по самому значению этих переменных, для некоторых из них возможны величины только одного из двух знаков (более сложных условий рассматривать не будем).

Для этого, конечно, дифференциальные уравнения (1) должны быть таковы, чтобы условия эти, которые будут вида

$$x_i \geqslant 0, \quad x_i \leqslant 0, \tag{55}$$

выполнялись во все время движения, будучи выполнены в начальный момент.

В этом случае в теоремах II и III, при выражении требования относительно знака функции V, условия (55) всегда должны быть подразумеваемы. Притом во всех предыдущих теоремах терминам «знакопостоянная» или «знакоопределенная функция» достаточно приписывать более условное значение, которое они получили бы, если бы в определениях предыдущего параграфа предполагалось, что переменные подчинены не только условиям (40), но и условиям (55) [15].

О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле





ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопрос, который будет составлять главный предмет этого мемуара, относится к возможности задачи электростатики и, в частности, к основной задаче, имеющей целью отыскание распределения электричества на поверхности проводника, при отсутствии всякого внешнего на него влияния.

Известно, что эта задача тесно связана с частным случаем задачи Дирихле, и эта связь такова, что первую задачу можно считать решенной, если добились решения второй.

Но, чтобы это было так, необходимо получить решение задачи Дирихле в виде такого выражения, которое было бы непосредственно пригодно для вычислений. Однако подобные выражения известны лишь при некоторых частных предположениях относительно проводника, и вообще существующие методы служат только для установления возможности задачи Дирихле.

Однако, если доказана только лишь возможность этой задачи, то нет еще права утверждать, что задача электростатики также возможна.

Действительно, для законности этого утверждения надо не только установить возможность задачи Дирихле, но и доказать, что ее решение, в случае, от которого зависит задача электростатики, может быть представлено в виде потенциала простого слоя, распределенного на поверхности проводника. Надо, следовательно, доказать существование

функции, способной представить плотность этого слоя, это же требует рассмотрения значений нормальной производной (производной, вычисленной по нормали) искомой гармонической функции на поверхности проводника.[1] Но общие методы, предложенные для исследования задачи Дирихле, приводят к результатам, которые не позволяют видеть: существуют ли эти значения, и отсюда-то и проистекает та трудность, которая, как мне кажется, не была еще устранена.

Правда, для доказательства возможности задачи электростатики часто пользовались прямым методом, основанным Гауссом на рассмотрении некоторых минимумов. Но эти рассмотрения так же мало достаточны, как и методы того же рода, ранее применявшиеся для доказательства принципа Дирихле.

Итак, строго говоря, этот метод ничего не доказывает, и вопрос, который нас интересует, невозможно считать решенным, кроме как в некоторых частных случаях.

Однако в некоторых исследованиях весьма важно знать, возможна ли рассматриваемая задача в общем случае. Это меня и побудило изучить заново вопрос, чтобы постараться вывести требуемое доказательство основ методов, которыми обладает в настоящее время наука для исследования задачи Дирихле.

Я остановился на методах Неймана, как на наиболее простых и, отправляясь от основного принципа этих методов, мне удалось установить, в достаточно общих предположениях, не только возможность задачи электростатики,

---

[1] Во всем дальнейшем мы будем понимать под гармонической функцией в области E всякую функцию, которая в точках области E, за исключением, быть может, точек границы, однозначна и непрерывна, как и ее производные по отношению к координатам, и которая удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, если область E распространяется в бесконечность, эта функция должна обращаться в нуль в бесконечности, стремясь к нему равномерно по всем направлениям (мы предполагаем, что граница области E не уходит в бесконечность).

о которой идет речь, но также и метода, который предложил для ее решения Робэн (Robin).[1]

Установив это, можно воспользоваться этим методом и для исследования более общих вопросов. Это я и стремился сделать, рассматривая общий случай задачи Дирихле и изыскивая условия, обеспечивающие существование на поверхности, служащей границей рассматриваемой области, предельных значений производных искомой гармонической функции.

При исследовании этой задачи подходящим методом мне удалось показать, что в отношении нормальной производной вопрос приводится к такому же вопросу для потенциала двойного слоя, плотность которого равна значению гармонической функции на поверхности

Изучение вопросов этого рода достаточно важно, так как значения производных гармонической функции на поверхности входят во многих случаях: достаточно вспомнить общую задачу электростатики, как и известную формулу, которой часто пользуются для представления решения задачи Дирихле, — формулу, содержащую нормальную производную функции Грина.

Таковы вопросы, составляющие предмет излагаемых ниже исследований.

---

[1] Надо помнить, что Робэн установил свой метод только *в предположении, что предварительно доказана возможность задачи.* Недавно В. А. Стеклов указал на изменение анализа Робэна, позволяющее освободиться от этого предположения и, следовательно, установить возможность задачи (Comptes Rendus, 13 декабря, 1897) Анализ Стеклова, как и анализ Робэна, приложим лишь к выпуклым поверхностям. Сообщая в «Comptes Rendus» (22 ноября, 1897) результаты своего исследования, я ограничился предположением, что рассматриваемая поверхность выпуклая. Но для моего анализа это ограничение не является существенным и, как будет видно в предлагаемом мемуаре, оно может быть заменено другим — более общим (см. п. 7).

ГЛАВА I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

1

Наше исследование будет относиться к случаю замкнутой поверхности S, относительно которой мы сделаем следующие предположения [1].

1. В каждой точке поверхности S существует определенная касательная плоскость.

2. Существует такая длина D, что если какую-нибудь точку p поверхности S взять за центр сферы радиуса D, то прямая, параллельная нормали к поверхности S в точке p, может встречать S внутри сферы лишь в одной точке.

3. Если через ϑ обозначить острый угол, который нормаль в какой-нибудь точке p поверхности S образует с нормалью в другой точке p' этой же поверхности, и через r — взаимное расстояние между этими двумя точками, то можно указать такие два положительные числа a и α, не зависящие от выбора точек p и p', чтобы было

$$\vartheta < ar^{\alpha}$$

при любом положении этих точек.

Кроме этих предположений, мы должны будем сделать еще одно. Но мы укажем его дальше, теперь же остано-

вимся на вышеуказанных предположениях, чтобы вывести из них некоторые следствия, нужные нам в дальнейшем.

Беря какую-нибудь точку p_0 поверхности S за начало прямоугольных координат и нормаль в этой точке за ось z, рассмотрим точки поверхности S, расстояние r_0 которых от точки p_0 не превосходит D.

Пусть p одна из таких точек, и x, y, z ее координаты.

В силу второго предположения, z будет однозначной функцией x, y, обращающейся в нуль при $x=0$, $y=0$, и эта функция, в силу двух других предположений, будет допускать производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y},$$

которые будут непрерывными, если D достаточно мало, чтобы угол ϑ_0, образуемый нормалью в точке p с нормалью в точке p_0, не достигал $\frac{1}{2}\pi$; это будет иметь место, если, например, имеем

$$aD^\alpha \leqslant 1.$$

Кроме того, если допустить это неравенство и принять во внимание, что

$$\cos\vartheta_0 > 1 - \frac{1}{2}\vartheta_0^2 > 1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha},$$

тогда найдем

$$\frac{1}{\cos\vartheta_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 1 + a^2 r_0^{2\alpha},$$

откуда вытекает, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 < 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} < 3a^2 r_0^{2\alpha}.$$

Положим теперь

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi$$

и будем рассматривать z, как функцию ρ и ψ.

Так как

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 < \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

то

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3} a r_0^\alpha,$$

и, следовательно,

$$|z| < \sqrt{3} a D^\alpha \rho < \sqrt{3} \rho.$$

Из этого заключаем, что

$$r_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2} < 2\rho.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3} a \, 2^\alpha \rho^\alpha, \tag{1}$$

и, следовательно,

$$|z| < \frac{\sqrt{3}\, 2^\alpha}{\alpha + 1} a \rho^{\alpha+1};$$

это неравенство можно заменить более простым

$$|z| < 2a\rho^{\alpha+1}, \tag{2}$$

замечая, что $2^\alpha \leqslant \alpha + 1$, ибо число α не может превосходить, очевидно, 1.

В то же самое время будем иметь

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 4a\rho^\alpha; \tag{3}$$

$$\frac{1}{\cos \vartheta_0} < 1 + 4a^2 \rho^{2\alpha}. \tag{4}$$

Все эти неравенства будут иметь место, пока $r_0 \leqslant D$, если взять за D, как мы это и будем предполагать в дальнейшем, количество, удовлетворяющее не только условию второго предположения, но также и следующему, $aD^\alpha \leqslant 1$.

Для дальнейшего полезно заметить, что если построить круглый цилиндр C, имеющий осью ось z и наименьшим расстоянием своих образующих до оси количество меньшее, чем $\frac{1}{2}D$, то часть S_0 поверхности S, вырезанная цилиндром C около точки p_0, будет целиком находиться внутри сферы радиуса D, имеющей центр в точке p_0. Следовательно, вышеприведенные неравенства будут иметь место для всех точек S_0.

2

В дальнейшем мы будем рассматривать потенциалы простого слоя и двойного слоя, расположенного на поверхности S, и теперь мы остановимся на некоторых предложениях, относящихся к этим потенциалам.

Мы начнем с установления точного понятия ***нормальной производной*** функции в какой-нибудь точке поверхности S.

Если поверхность S замкнутая, то все пространство будет разделено ею на две части: пространство внутреннее E_i и пространство внешнее E_e.

Рассмотрим одно из этих двух пространств, которое мы будем называть через E.

Пусть будут: $P(x, y, z)$ — точка пространства E, и $F(x, y, z)$ — некоторая функция, определенная в области E; мы будем предполагать, что эта функция однозначная и непрерывная, как и ее производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

пока точка P не находится на поверхности S.

Предположим, что точка P находится на нормали, проведенной к S в точке p, и, понимая под n одно из двух направлений этой нормали, рассмотрим выражение

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial F}{\partial y}\cos(n, y)+\frac{\partial F}{\partial z}\cos(n, z),$$

которое будем обозначать через

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_P.$$

Допустим теперь, что точка P, *оставаясь постоянно на нормали* n, неограниченно приближается к точке p.

Тогда, если указанное выше выражение стремится к пределу, то этот предел будет представлять то, что мы будем называть *нормальной производной* функции F в точке p и обозначать через $\frac{\partial F}{\partial n}$.

В тех случаях, когда необходимо привлечь внимание к рассматриваемому пространству, мы будем обозначать точку P через P_i или через P_e, в зависимости от того, принадлежит она к E_i или к E_e, и предел, о котором идет речь, будет обозначаться через

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_i \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_e,$$

так что будем иметь

$$\lim\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{P_i}=\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_i, \quad \lim\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{P_e}=\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_e,$$

причем точки P_i, P_e неограниченно приближаются к точке p.

Мы будем называть эти пределы: *внутренняя нормальная производная* и *внешняя нормальная производная.*

Установив это, рассмотрим потенциал V простого слоя плотности k, распределенного на поверхности S.

Пусть будут: ds' — элемент поверхности S, k' — значение k в точке p', принадлежащей этому элементу, и R — расстояние точки P от точки p'.

Будем иметь

$$V = \int \frac{k' \, ds'}{R},$$

где интеграл распространен на всю поверхность S.

Мы будем предполагать, что плотность k является непрерывной функцией на поверхности S.[1] Тогда V будет функцией x, y, z, непрерывной во всем пространстве. Кроме того, в силу предположений, сделанных относительно поверхности S, эта функция будет допускать в каждой точке p поверхности S обе нормальные производные

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e.$$

Мы будем предполагать, для определенности, что n обозначает направление нормали *внутреннее* по отношению к поверхности S, и в дальнейшем, когда мы будем говорить о направлении нормали, мы будем всегда понимать именно это направление, если не будет оговорено противоположное.

Установив это, напомним две известные формулы

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i &= \int \frac{k' \cos \varphi}{r^2} \, ds' - 2\pi k; \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e &= \int \frac{k' \cos \varphi}{r^2} \, ds' + 2\pi k, \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где φ обозначает угол, который нормаль (направление n) в рассматриваемой точке p образует с направлением pp',

[1] Говоря, что какая-нибудь функция k, определенная в точках поверхности S, есть непрерывная в точке p, мы понимаем под этим, что для всякого положительного числа ε можно указать другое положительное число l такое, что

$$|k - k'| < \varepsilon$$

всякий раз, как расстояние точки p' от точки p не превосходит l. Если это условие выполнено для всех положений точки p, функция k будет *непрерывной* на поверхности S. Известно, что число l может быть выбрано тогда независимо от положения точки p.

и r есть расстояние pp'. Отсюда следует, что, например, выражение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{P_i} - J + 2\pi k,$$

где

$$J = \int \frac{k' \cos \varphi}{r^2} ds',$$

становится бесконечно малым количеством, когда точка P_i стремится к p.

В дальнейшем нам необходимо будет иметь верхний предел абсолютного значения этого количества, и теперь мы перейдем к его отысканию, ограничиваясь предположением, что непрерывная функция k удовлетворяет условию, выражаемому неравенством

$$|k - k'| < N r^{\beta}, \tag{6}$$

где N, β обозначают положительные числа, не зависящие от положения точек p, p', к которым относятся значения k, k'.

3

Пусть p_0 есть точка поверхности S, и $J(p_0)$,— значение функции J в этой точке.

Пусть, с другой стороны, P_0 есть точка области E_i, находящаяся всегда на нормали к поверхности S в точке p_0.

Если через ζ обозначить расстояние $P_0 p_0$, то значение V в точке P_0 будет функцией ζ, которую мы будем обозначать через $V(\zeta)$.

Обозначая производную этой функции через $V'(\zeta)$, изучим выражение

$$V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0,$$

где k_0 обозначает плотность в точке p_0.

Мы будем пользоваться системой координат, введенной в п. 1, и обозначим через x, y, z координаты точки p элемента поверхности ds. Тогда, полагая

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho; \quad \sqrt{\rho^2+z^2}=r_0; \quad \sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}=R_0,$$

будем иметь

$$V'(\zeta)=\int \frac{k(z-\zeta)}{R_0^3}ds, \quad J(p_0)=\int \frac{kz}{r_0^3}ds,$$

причем интеграции распространены на поверхность S.

Вообразим теперь круглый цилиндр C, имеющий осью ось z (нормаль в точке p_0) и наименьшим расстоянием своих образующих до оси количество δ, которое мы будем считать, обращая внимание на сказанное в п. 1, меньшим, чем $\frac{1}{2}D$.

Пусть S_0 будет часть поверхности S, вырезанная цилиндром C вблизи точки p_0, и S_1 — остающаяся часть.

Обозначая через $V_0'(\zeta)$, $J_0(p_0)$ интегралы

$$\int \frac{k(z-\zeta)}{R_0^3}ds, \quad \int \frac{kz}{r_0^3}ds,$$

распространенные на S_0, и через $V_1'(\zeta)$ первый интеграл, распространенный на S_1, будем иметь

$$V'(\zeta)=V_0'(\zeta)+V_1'(\zeta);$$
$$J(p_0)=J_0(p_0)+V_1'(0).$$

Следовательно, количество

$$|V'(\zeta)-J(p_0)+2\pi k_0|$$

не будет превосходить такого

$$|V_1'(\zeta)-V_1'(0)|+|V_0'(\zeta)-J_0(p_0)+2\pi k_0|.$$

Но если, оставляя число δ неизменным, рассматривать лишь достаточно малые значения ζ, например не превос-

ходящие $\frac{1}{2}D$ то тогда, очевидно, можно будет найти положительное число A_1, не зависящее ни от положения точки p_0, ни от функции k, и притом такое, что

$$|V_1'(\zeta)-V_1'(0)|<A_1 K\zeta,$$

где K есть наибольшее значение, какое может достичь функция $|k|$ на поверхности S.

Теперь остается рассмотреть лишь выражение

$$V_0'(\zeta)-J_0(p_0)+2\pi k_0.$$

Положим

$$\int\left(\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)kzds=P,$$

$$2\pi k_0-\zeta\int\frac{k}{R_0^3}ds=Q,$$

причем интеграции распространены на S_0.

Тогда мы будем иметь

$$|V_0'(\zeta)-J_0(p_0)+2\pi k_0|<|P|+|Q|.$$

Следовательно, мы должны оценить верхние пределы для $|P|$ и $|Q|$; это мы можем сделать, пользуясь неравенствами п. 1.

Возьмем за независимые переменные в подинтегральных функциях полярные координаты, определяемые уравнениями

$$x=\rho\cos\psi,\quad y=\rho\sin\psi.$$

Тогда, обозначая через ϑ_0 угол, образованный нормалью в точке p с осью z, будем иметь

$$P=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\delta}\frac{kz}{\cos\vartheta_0}\left(\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)\rho d\rho.$$

Но, в силу очевидных неравенств

$$|R_0-r_0|<\zeta,\quad R_0>\rho,\quad r_0>\rho,$$

получаем

$$\left|\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right|<\frac{\zeta}{R_0 r_0}\left(\frac{1}{R_0^2}+\frac{1}{R_0 r_0}+\frac{1}{r_0^2}\right)<\frac{3\zeta}{R_0 \rho^3}.$$

С другой стороны, полагая

$$\frac{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}{R_0}=T,$$

находим

$$T^2-1=\frac{2z(\zeta-z)+z^2}{\rho^2+(z-\zeta)^2},$$

и, следовательно [2],

$$|T^2-1|<\left|\frac{z}{\rho}\right|+\frac{z^2}{\rho^2}$$

для любого ζ.

Предположим теперь, для определенности, что δ выбрано согласно неравенству

$$2a\delta^\alpha<1.$$

Тогда для точек поверхности S_0 будем иметь, в силу (2), $|z|<\rho$ и, следовательно, $T<2$.

Итак, будем иметь

$$\left|\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right|<\frac{3T\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}<\frac{6\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}.$$

Установив это и воспользовавшись неравенствами

$$|z|<2a\rho^{\alpha+1}, \quad \cos\vartheta_0>\frac{1}{2},$$

из коих второе следует из (4), находим

$$P|<48\pi Ka\zeta\int_0^\delta\frac{\rho^{\alpha-1}\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}$$

или, что сводится к тому же,

$$|P| < 48\pi K a \zeta^{\alpha} \int_{0}^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Мы уже отмечали, что число α не может превосходить 1. Но, если $\alpha < 1$, интеграл, входящий в это неравенство, не сможет превзойти, при любом ζ, постоянного числа

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

и, если $\alpha = 1$, мы будем иметь для произведения этого интеграла на ζ^{ε} верхний предел, не зависящий от ζ; ε есть постоянная положительная дробь, которую можно притом взять по желанию сколь угодно близкой к нулю.

Отсюда видно, что если под α_0 подразумевать постоянное положительное число, удовлетворяющее условиям

$$\alpha_0 < 1, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha,$$

то будем иметь

$$|P| < A_0 K \zeta^{\alpha_0},$$

где A_0 есть некоторая постоянная, не зависящая ни от положения точки p, ни от функции k.

Рассмотрим теперь количество Q.

Легко видеть, что оно может быть представлено в виде

$$Q = \frac{2\pi k_0 \zeta}{\sqrt{\delta^2+\zeta^2}} + k_0 \zeta \int_{0}^{2\pi} d\psi \int_{0}^{\delta} \left(1 - \frac{T^3}{\cos \vartheta_0}\right) \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} -$$
$$- \zeta \int_{0}^{2\pi} d\psi \int_{0}^{\delta} \frac{(k-k_0)\, T^3}{\cos \vartheta_0} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но для точек поверхности S_0 имеем

$$|T^2-1|<\left|\frac{z}{\rho}\right|+\frac{z^2}{\rho^2}<2\left|\frac{z}{\rho}\right|<4a\rho^\alpha,$$

и следовательно, так как $T<2$,

$$|T^3-1|<(T+1)|T^2-1|<12a\rho^\alpha.$$

С другой стороны, при допущении $2a\delta^\alpha<1$, неравенство (4) дает

$$\frac{1}{\cos\vartheta_0}<1+2a\rho^\alpha\cdot$$

Следовательно, благодаря очевидному неравенству

$$|ab-1|<|a-1|+|b-1|+|a-1||b-1|,$$

находим [3]

$$\left|\frac{T^3}{\cos\vartheta_0}-1\right|<26a\rho^\alpha\cdot$$

Пользуясь этим неравенством, а также следующим

$$\frac{T^3}{\cos\vartheta_0}<14,$$

которое из него вытекает, и замечая, что, в силу (6),

$$|k-k_0|<N(2\rho)^\beta$$

(ибо для рассматриваемых точек $r_0<2\rho$), приходим, после очевидных преобразований, к неравенству

$$|Q|<2\pi K\frac{\zeta}{\delta}+52\pi Ka\zeta^\alpha\int\limits_0^{\frac{\delta}{\zeta}}\frac{x^{\alpha+1}\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+28\pi N(2\zeta)^\beta\int\limits_0^{\frac{\delta}{\zeta}}\frac{x^{\beta+1}\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

Но, за исключением случая постоянного k, число β не может превосходить единицу. Кроме того, всегда можно предполагать, что $\beta < 1$.

Отсюда, замечая, что интегралы, входящие в это неравенство, того же самого вида, какие мы встречали выше будем иметь

$$|Q| < A_0' K\zeta^{\alpha_0} + BN\zeta^{\beta},$$

где A_0' и B суть числа того же рода, что и A_0 и A_1.

Итак, собирая все полученные неравенства, находим

$$|V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0| < AK\zeta^{\alpha_0} + BN\zeta,$$

где A и B суть постоянные числа, не зависящие ни от положения точки p_0, ни от функции k.

В случае, который мы имеем в виду, будет $\beta < \alpha$, и, следовательно, можно будет взять $\alpha_0 = \beta$.

Тогда, заменяя p_0 через p и пользуясь снова обозначениями п. 2, получим

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{P_i} - J + 2\pi k \right| < (AK + BN)\zeta^{\beta}, \tag{7}$$

где ζ есть расстояние $P_i p$.

4

Условие непрерывности функции k обеспечивает, как это было уже отмечено, существование обоих нормальных производных

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e$$

в каждой точке p поверхности S.

Следовательно, для каждой из двух областей E_i, E_e будет существовать, при этом единственном условии, предел выражения

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z),$$

когда точка $P(x, y, z)$, принадлежа этой области, будет стремиться неограниченно приблизиться к точке p, *оставаясь постоянно на нормали n.*

Но предположим теперь, что точка P приближается к p по какой-нибудь кривой.

Можно ли тогда утверждать, что существует предел вышеуказанного выражения? И, более обще, можно ли вывести заключение о существовании пределов трех производных

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}? \tag{8}$$

Легко убедиться, что при единственном условии непрерывности k это заключение не было бы законным.

Но, если предположить, что функция k удовлетворяет, кроме того, условию (6), то можно показать, как мы это и сделаем вскоре, что пределы, о которых идет речь, будут существовать и не будут зависеть от выбора кривой, по которой точка P приближается к p.

Пусть p_0 — точка поверхности S, к которой приближается точка P рассматриваемой области, и пусть P_0 — точка той же области, расположенная на нормали в точке p_0.

Обозначая значения производных (8) в точке P соответственно через $X(P)$, $Y(P)$, $Z(P)$, мы начнем с доказательства существования пределов для $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$ при стремлении точки P_0 к p_0.

Чтобы доказать это в общем случае, достаточно, очевидно, сделать это в каком-либо частном предположении относительно системы координат.

Поэтому, возьмем систему, рассмотренную в предыдущем параграфе; точка p_0 есть начало координат, и направление pP_0 есть ось z.

Тогда надо будет рассмотреть только два выражения — $X(P_0)$, $Y(P_0)$ и, сверх того, достаточно будет установить существование предела для одного из них, например для $X(P_0)$.

Пользуясь обозначениями предыдущего параграфа, мы будем иметь

$$X(P_0)=\int \frac{kx}{R_0^3}\,ds,$$

причем интеграл берется по поверхности S.

Введем теперь цилиндр C, который мы там определили, и обозначим через $X_0(P_0)$, $X_1(P_0)$ интегралы того же самого вида, распространенные на S_0 и S_1.

Будем иметь

$$X(P_0)=X_0(P_0)+X_1(P_0).$$

Но легко видеть, что при неизменно выбранном δ и достаточно малом ζ $\left(\text{например меньшем, чем } \frac{1}{2}D\right)$, можно будет найти положительное число C_1, не зависящее от положения точки p_0 и такое, что

$$|X_1(P_0)-X_1(p_0)|<C_1\zeta.$$

С другой стороны, при δ достаточно малом, имеем

$$X_0(P_0)=\int\limits_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int\limits_0^{\delta}\frac{k\rho^2\,d\rho}{R_0^3\cos\vartheta_0},$$

что можно представить в виде

$$X_0(P_0)=k_0\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\delta}\left(\frac{T^3}{\cos\vartheta_0}-1\right)\frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\delta}\frac{(k-k_0)T^3}{\cos\vartheta_0}\frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

и, если относительно δ сделать те же предположения, что и в предыдущем параграфе, то будем иметь в области интеграции

$$\left|\frac{T^3}{\cos\vartheta_0}-1\right|<26a\rho^{\alpha}.$$

Из этого, принимая во внимание неравенство [4]

$$|k-k_0|<Nr_0^{\beta}<2N\rho^{\beta},$$

видим непосредственно, что при стремлении ζ к нулю функция $X_0(P_0)$ будет стремиться к определенному пределу.

Кроме того, обозначая этот предел через $X_0(p_0)$, будем иметь

$$X_0(p_0)=k_0\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\delta}\left(\frac{T_0^3}{\cos\vartheta_0}-1\right)\frac{d\rho}{\rho}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\delta}\frac{(k-k_0)T_0^3}{\cos\vartheta_0}\frac{d\rho}{\rho},$$

где T_0 есть значение T для $\zeta=0$.

Итак, видно, что при стремлении ζ к нулю функция $X(P_0)$ будет стремиться к пределу[1]

$$X_0(p_0)+X_1(p_0),$$

[1] Можно заметить, что этот предел один и тот же для областей E_i и E_e.

который мы будем обозначать через $X(p_0)$. Кроме того, легко удостовериться в том, что $X(P_0)$ будет стремиться к этому пределу *равномерно* для всех положений точки p_0.

Чтобы показать это, заметим, что можно написать

$$X_0(P_0)-X_0(p_0)=k_0\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\delta}\left(\frac{T^3}{\cos\vartheta_0}-1\right)\left[\frac{1}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\rho^3}\right]\rho^2 d\rho+$$
$$+\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\delta}\frac{k-k_0}{\cos\vartheta_0}\left(\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)\rho^2\,d\rho+k_0\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\delta}\frac{T^3-T_0^3}{\cos\vartheta_0}\frac{d\rho}{\rho}.$$

Но имеем

$$T^2-T_0^2=\frac{T^2(2\rho^2 z\zeta+z^2\zeta^2)}{(\rho^2+\zeta^2)(\rho^2+z^2)},$$

и, следовательно, так как в области интеграции $T<2$, $a\rho^\alpha<a\delta^\alpha<\frac{1}{2}$, $T_0<1$, находим

$$|T^2-T_0^2|<\frac{16a(\rho+a\rho^\alpha\zeta)\rho^\alpha\zeta}{\rho^2+\zeta^2}<\frac{24a\rho^\alpha\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}};$$
$$|T^3-T_0^3|<(T+T_0)|T^2-T_0^2|<\frac{72a\rho^\alpha\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}.$$

Пользуясь этим неравенством и, кроме того, такими

$$\left|\frac{T^3}{\cos\vartheta_0}-1\right|<26a\rho^\alpha,\quad |k-k_0|<2N\rho^\beta,\quad \cos\vartheta_0>\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}<\frac{2\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}},\quad \left|\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right|<\frac{6\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}},$$

приходим к следующему

$$|X_0(P_0)-X_0(p_0)|<392\pi K a\zeta^\alpha\int_0^{\frac{\delta}{\zeta}}\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}}+48\pi N\zeta^\beta\int_0^{\frac{\delta}{\zeta}}\frac{x^{\beta-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

и отсюда, если $\beta < \alpha$, выводим, что

$$|X_0(P_0) - X_0(p_0)| < C_0 \zeta^{\beta},$$

где C_0 есть число того же рода, что и C_1.

Итак, обозначая через C положительное число, надлежащим образом выбранное и не зависящее от положения точки p_0, будем иметь

$$|X(P_0) - X(p_0)| < C\zeta^{\beta}$$

для всех значений ζ, которые не превосходят некоторого постоянного предела $\left(\text{например для } \zeta < \frac{1}{2} D\right)$; это неравенство действительно доказывает правильность нашего утверждения.

Обратимся теперь к какой-нибудь системе координат.

На основании только что доказанного и доказанного в предыдущем параграфе, мы можем утверждать, что когда расстояние ζ точки P_0 от точки p_0 стремится к нулю, то количества $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$ сремятся к некоторым пределам (вообще говоря, различным для областей E_i и E); это стремление будет равномерным для всех положений точки p_0.

Эти пределы, которые мы можем обозначить, рассматривая только одну из двух областей E_i, E_e, через $X(p_0)$, $Y(p_0)$, $Z(p_0)$, будут представлять собою некоторые функции точки p_0, и легко видеть, что эти функции будут непрерывными на S.

Действительно, выражения $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$, если в них дать ζ вполне определенное и достаточно малое значение $\left(\text{например меньше, чем } \frac{1}{2} D\right)$, станут функциями точки p_0, непрерывными на S, и так как для $\zeta = 0$ они *равномерно* стремятся к функциям $X(p_0)$, $Y(p_0)$, $Z(p_0)$, то отсюда непосредственно следует непрерывность этих последних.

Установив это, рассмотрим, кроме точки p_0, другую точку p поверхности S и точку P рассматриваемой области, расположенную на нормали в точке p.

Пусть ζ будет расстоянием pP и r_0 — расстоянием pp_0.

Каково бы ни было положение точки p, мы можем взять ζ столь малым, чтобы разности

$$X(P)-X(p),\ Y(P)-Y(p),\ Z(P)-Z(p)$$

были по абсолютной величине малыми по желанию и, с другой стороны, в силу непрерывности функций $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ на поверхности S, возможно r_0 взять настолько малым, чтобы разности

$$X(p)-X(p_0),\quad Y(p)-Y(p_0),\ Z(p)-Z(p_0)$$

были столь близки к нулю, как это мы пожелали бы.

Итак, ζ и r_0 можно взять столь малыми, чтобы было

$$|X(P)-X(p_0)|<\varepsilon,\quad |Y(P)-Y(p_0)|<\varepsilon,\quad |Z(P)-Z(p_0)|<\varepsilon$$

при любом числе ε.

Следовательно, имеем

$$\lim X(P)=X(p_0),\quad \lim Y(P)=Y(p_0),\quad \lim Z(P)=Z(p_0)$$

независимо от закона приближения точки P к p_0.

5

Интеграл J, входящий в выражение $\frac{\partial V}{\partial n}$, будет играть в дальнейшем значительную роль, и мы остановимся теперь на одном из его свойств.

Легко показать, что если k будет какой-нибудь функцией, интегрируемой на поверхности S (и, следовательно, ограниченной), то этот интеграл будет изображать непрерывную функцию на S, так что, если обозначить через J' значение J в точке p' и через r — расстояние этой точки от точки p, то разность $J'-J$ сделается бесконечно малой всякий раз, когда r будет стремиться к нулю.

Больше того, можно показать, что эта разность никогда не будет бесконечно-малого порядка по отношению к r [5].

Чтобы установить это положение, — большой важности для дальнейшего, надо показать, что можно назначить для отношения

$$\frac{|J'-J|}{r^{\beta}}$$

верхний предел, не зависящий от положения точек p, p', причем β есть некоторое определенное положительное число.

Определение точного верхнего предела значений β, удовлетворяющих этому условию, было бы достаточно трудной задачей, и мы ограничимся лишь указанием одного из таких значений β, что нам будет вполне достаточно при нашем исследовании.

Пусть p_0 и p_1 будут две рассматриваемые точки поверхности S, взаимное расстояние между которыми будет обозначаться через r.

Понимая под p точку элемента поверхности ds, будем обозначать через r_0 и φ_0 расстояние $p_0 p$ и угол, образуемый нормалью в точке p_0 с направлением $p_0 p$. Точно так же, через r_1 и φ_1 будут обозначены расстояние $p_1 p$ и угол нормали в точке p_1 с направлением $p_1 p$. Тогда для значений J в точках p_0, p_1 будем иметь такие выражения

$$J(p_0)=\int\frac{k\cos\varphi_0}{r_0^2}\,ds,\quad J(p_1)=\int\frac{k\cos\varphi_1}{r_1^2}\,ds,$$

где интегралы распространены на поверхность S, и мы должны оценить в функции r верхний предел для

$$|J(p_1)-J(p_0)|.$$

Введем снова цилиндр C, рассмотренный в п. 3, имеющий своей осью нормаль в точке p_0, и обозначим через $J_0(p_0)$, $J_0(p_1)$ вышеуказанные интегралы, распространенные на S_0, и через $J_1(p_0)$, $J_1(p_1)$ — эти же интегралы, распространенные на S_1.

Полагая

$$J_1(p_1) - J_1(p_0) = \Delta$$

и замечая, что

$$|J(p_1) - J(p_0)| < |J_0(p_0)| + |J_0(p_1)| + |\Delta|,$$

найдем верхние пределы трех членов второй части в функции δ и r, с условием установления затем некоторой зависимости между этими двумя количествами.

В нашем исследовании мы будем предполагать $r < \delta$.

Начнем с двух первых членов.

Чтобы оценить их верхние пределы, рассмотрим вообще интеграл

$$J_s(p_0) = \int\limits_{(s)} \frac{k \cos \varphi_0}{r_0^2} ds,$$

распространенный на какую-нибудь часть s поверхности S, причем r_0 не превосходит достаточно малого количества l.

Воспользуемся системой координат и обозначениями п. 3. Мы будем тогда иметь

$$J_s(p_0) = \int\limits_{(s)} \frac{kz}{r_0^3} ds,$$

и, считая l достаточно малым, чтобы можно было пользоваться неравенствами

$$|z| < 2a\rho^{\alpha+1}, \quad \cos \vartheta_0 > \frac{1}{2},$$

мы получаем

$$|J_s(p_0)| < 4aK \int\limits_{(s)} \rho^{\alpha-2} \cos \vartheta_0 \, ds.$$

Следовательно, тем более,

$$|J_s(p_0)| < 4aK \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^l \rho^{\alpha-1} d\rho = \frac{8\pi}{\alpha} Kal^\alpha,$$

Теперь, для получения искомых пределов, надо лишь заметить, что в интегралах $J_0(p_0)$, $J_0(p_1)$

$$r_0 < 2\delta, \quad r_1 < r + r_0 < 3\delta.$$

Следовательно, при δ достаточно малом, имеем

$$|J_0(p_0)| < \frac{16\pi}{\alpha} K\, a\delta^\alpha, \; |J_0(p_1)| < \frac{24\pi}{\alpha} K\, a\delta^\alpha.$$

Рассмотрим теперь третий член.

Мы будем предполагать, что δ не превосходит определенного количества δ_0, удовлетворяющего неравенствам

$$\delta_0 < \frac{1}{2} D, \quad 2\, a\delta_0^{\,\alpha} < 1,$$

и обозначим через Δ_0 значение Δ для $\delta = \delta_0$.

Имеем

$$|\Delta| < |\Delta - \Delta_0| + |\Delta_0|,$$

$$\Delta - \Delta_0 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_\delta^{\delta_0} \left(\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right) \frac{k\rho\, d\rho}{\cos\vartheta_0}.$$

Но

$$r_1 \cos\varphi_1 = \left[z - z_1 - (x - x_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} - (y - y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right]\cos\vartheta.$$

Здесь ϑ есть угол, образуемый нормалью в точке p_1 с нормалью в точке p_0, и x_1, y_1 z_1 — координаты точки p_1.

Следовательно, имеем

$$|r_1\cos\varphi_1 - r_0\cos\varphi_0| <$$

$$< |z|(1 - \cos\vartheta) + |z_1| + \left|(x - x_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (y - y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right|,$$

ибо

$$r_0 \cos\varphi_0 = z.$$

Кроме того,

$$\left|(x - x_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (y - y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right| <$$

$$< \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)^2},$$

и, в силу неравенств (2), (3), (4), имеем

$$|z_1| < 2a\delta_0 r^\alpha, \quad \sqrt{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)^2} < 4ar^\alpha, \quad 1 - \cos\vartheta < 2ar^\alpha.$$

Следовательно, замечая, что в области интеграции

$$|z| < \delta_0, \quad \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} < 2\delta_0,$$

получаем

$$|r_1 \cos\varphi_1 - r_0 \cos\varphi_0| < 12a\delta_0 r^\alpha.$$

С другой стороны, ввиду того, что

$$|r_1 - r_0| < r, \quad r_0 > \rho, \quad r_1 > r_0 - r > \rho - r$$

и в области интеграции $\rho - r > 0$, находим

$$\left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{r}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_0} + \frac{1}{r_0^2}\right) < \frac{3r}{r_1 \rho (\rho - r)^2}.$$

Предположим, что $r < \frac{1}{2}\delta$. Тогда это неравенство даст

$$\left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{12r}{r_1 \rho^3},$$

и так как

$$\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} = \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) r_1 \cos\varphi_1 + \frac{r_1\cos\varphi_1 - r_0\cos\varphi_0}{r_0^3},$$

то будем иметь в области интеграции

$$\left|\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| < \frac{12r}{\rho^3} + \frac{12a\delta_0 r^\alpha}{\rho^3}.$$

Отсюда, замечая, что вторая часть не превосходит количества

$$\frac{12(\delta_0^{1-\alpha} + a\delta_0) r^\alpha}{\rho^3} < \frac{18\delta_0^{1-\alpha} r^\alpha}{\rho^3}$$

и что в подинтегральной функции $\cos\vartheta_0 > \frac{1}{2}$, находим

$$|\Delta - \Delta_0| < 72\pi\delta_0^{1-\alpha} K \frac{r^\alpha}{\delta}.$$

С другой стороны существует, очевидно, такое определенное число H_0', не зависящее от функции k, что

$$|\Delta_0| < H_0' K r^{\alpha}.$$

Следовательно, для другого числа H' того же свойства будем иметь

$$|\Delta| < H' K \frac{r^{\alpha}}{\delta}.$$

Изо всего этого заключаем, что будет существовать неравенство вида

$$|J(p_1) - J(p_0)| < H' K \frac{r^{\alpha}}{\delta} + H'' K \delta^{\alpha},$$

где H', H'' суть числа, не зависящие ни от положения рассматриваемых точек, ни от функции k, ни от δ, и из самой природы этого неравенства видно, что оно будет иметь место не только в тех предположениях, которые мы делали при его получении, но также и при любых r и δ, если только H' и H'' взять достаточно большими.

Положим теперь

$$\delta = c r^{\gamma},$$

понимая под c какое-нибудь положительное постоянное число и предполагая, что

$$\gamma = \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Тогда наше неравенство станет таким

$$|J(p_1) - J(p_0)| < \left(H' \frac{1}{c} + H'' c^{\alpha}\right) K$$

со следующим значением β:

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}.$$

Это и есть искомый результат

Заменяя p_0, p_1 через p, p' и возвращаясь к обозначениям, введенным в начале настоящего параграфа, мы представим его в виде

$$|J' - J| < HKr^{\beta}, \tag{9}$$

где H есть положительное число, не зависящее ни от положения точек p, p', ни от функции k.

6

Кроме потенциалов простых слоев, мы должны будем рассматривать, как мы уже говорили об этом, и потенциалы двойных слоев.

Под потенциалом, в точке P, двойного слоя плотности (или момента) μ понимают, как известно, интеграл

$$W = \int \frac{\mu' \cos \Phi'}{R^2} ds',$$

в котором Φ' обозначает угол, образуемый нормалью в точке p' элемента ds' с направлением $p'P$; R есть расстояние $p'P$, и μ' — значение μ в точке p'.

Мы будем предполагать, что μ есть непрерывная функция на поверхности S, по которой распространяется интеграция.

При этом условии W будет изображать функцию координат x, y, z точки P, полностью определенную во всем пространстве. Но эта функция, оставаясь непрерывной, когда точка P не находится на S, изменяется скачкообразно, когда эта точка пересекает поверхность в какой-нибудь точке p.

Пусть φ', r будут значениями Φ', R, когда точка P находится в p и

$$w = \int \frac{\mu' \cos \varphi'}{r^2} ds'.$$

Тогда w будет представлять то, что называется ***прямым значением*** W в точке p; это значение отличается, вообще, от предельных значений w_i и w_e, которые получаем в пред-

положении, что точка P неограниченно приближается к p, постоянно оставаясь или в области E_i, или в области E_e.

Как известно, имеем

$$\begin{aligned} w_i &= w + 2\pi\mu, \\ w_e &= w - 2\pi\mu. \end{aligned} \tag{10}$$

Можно заметить, что если μ непрерывна, то w и, следовательно, w_i, w_e будут представлять собою непрерывные функции на S.

Предполагая теперь, что точка P находится на нормали n точки p, рассмотрим выражение

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P,$$

которое встретится в нашем исследовании, в предположении, что расстояние ζ точки P от точки p достаточно малое.

Ясно, что одного лишь условия непрерывности функций μ недостаточно еще для обеспечения существования предела указанного выше выражения при ζ, стремящемся к нулю.

Следовательно, нормальная производная функция W существует лишь при некоторых дополнительных условиях, и эти условия будут указаны в дальнейшем.

Теперь же мы примем лишь те предположения, которые были уже сделаны и, оставаясь в области этих общих предположений, мы ограничимся тем, что покажем, что при ζ достаточно малых существует верхний предел для произведения

$$\zeta \left| \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P \right|;$$

этого нам будет достаточно для дальнейшего исследования.

Понимая под ϑ угол двух нормалей в точках p и p' и под Φ угол нормали n в точке p с направлением $P p'$, будем иметь [6]

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \int (\cos\vartheta + 3\cos\Phi\cos\Phi') \frac{\mu'\, ds'}{R^3}\, .$$

Следовательно,

$$\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P\right| < 4M \int \frac{ds'}{R^3},$$

где M есть наибольшее значение функции $|\mu|$ на поверхности S.

Но о входящем сюда интеграле хорошо известно, что при ζ, достаточно малом, можно указать верхний предел для произведения [7]

$$\zeta \int \frac{ds'}{R^3}.$$

Кроме того, если отношение ζ к D не превосходит определенной дроби, например $1/2$, этот предел может быть выбран независимо от положения точки p.

Следовательно, для подобных значений ζ будем иметь неравенство вида

$$\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P\right| < G\frac{M}{\zeta}, \tag{11}$$

где G есть постоянное число, не зависящее ни от положения точки p, ни от функции μ.

7

Пусть v_0 — функция, определенная в точках поверхности S и интегрируемая на этой поверхности (и, следовательно, ограниченная).

Предположим, что, отправляясь от этой функции, мы образовали неограниченную последовательность функций

$$v_1,\ v_2,\ v_3, \ldots,$$

связанных уравнениями вида

$$v_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\varphi'}{r^2}\,ds',$$

где m есть число из последовательности $1, 2, 3, \ldots$, и v'_{m-1} — значение функции v_{m-1} в точке p'.

Известно, что эта последовательность функций играет весьма важную роль в методах, предложенных Нейманом для различных задач, связанных с уравнением Лапласа.

В самом деле, известно, что эти методы основаны на следующем принципе, который мы будем называть *принципом Неймана* [8].

Какова бы ни была функция v_0, существует такое постоянное число C, что для всех точек S и для всех значений m имеем

$$|v_m - C| < L\lambda^m, \tag{12}$$

где L и λ суть положительные постоянные числа, не зависящие от числа m, и λ *представляет собою число, меньшее единицы и совершенно не зависящее от функции* v_0.

Этот же принцип положим и мы в основу нашего исследования.

Первое доказательство этого принципа было дано, как известно, Нейманом, который предложил, с этой целью, специальный метод, являющийся в настоящее время классическим.

Этот метод прилагается только к выпуклым поверхностям. Но это уже достаточно общий случай, когда он может служить для безупречно строгого доказательства принципа, по крайней мере в допущениях, здесь принимаемых.

Ввиду этого, в своей заметке в «Comptes Rendus» (22 ноября 1897) я ограничился предположением, что рассматриваемая поверхность — выпуклая.

Однако же для справедливости принципа это предположение не является в какой-либо мере необходимым. В самом деле, из последних исследований Пуанкаре (Acta mathematica, t. XX) известно, что принцип Неймана может быть вполне справедливым также и для некоторых невыпуклых поверхностей.

Сверх того, анализ, который будет дан здесь, совершенно не зависит от этого предположения, и все дальнейшее будет

приложимо не только к выпуклым поверхностям, но и ко всякой поверхности, удовлетворяющей условиям п. 1 и для которой удалось доказать рассматриваемый принцип.

На этом основании, вместо того, чтобы считать поверхность S выпуклой, мы сделаем теперь более общее предположение, что принцип Неймана приложим.

И именно в этом будет заключаться то предположение, которое мы должны были еще сделать, как упоминали об этом в п. 1.

После этого вступления перейдем к нашему исследованию.

ГЛАВА II

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

8

Мы будем рассматривать только один проводник конечного протяжения и ограниченный одной замкнутой поверхностью S, относительно которой мы сделаем предположения, указанные в п. 1.

Предположим, что наш проводник заряжен данным количеством электричества и что отсутствует какое-либо внешнее на него влияние.

Известно, что если равновесие возможно, то электричество распределится на поверхности S с такой плоскостью k, что интеграл

$$V = \int \frac{k' \, ds'}{R},$$

представляющий в принятых уже обозначениях (п. 2) потенциал электрического слоя, будет сохранять постоянное значение C внутри всего проводника.

Следовательно, для доказательства возможности задачи, которой мы занимаемся, надо установить существование такой функции k, которая удовлетворяла бы указанному выше условию и для которой интеграл

$$\int k \, ds$$

имел бы данное значение.[1]

---

[1] Мы будем обозначать элемент поверхности и через ds и через ds', а переменная точка, принадлежащая этому элементу, будет обозначаться

Можно заметить, что эта функция, если только она непрерывна, удовлетворяет уравнению

$$k = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k' \cos \varphi}{r^2} ds', \tag{13}$$

непосредственно вытекающему из первой формулы (5).

Обратно, для каждого непрерывного решения этого уравнения интеграл

$$\int \frac{k' \, ds'}{R}$$

имеет внутри всего проводника постоянное значение. Следовательно, если это решение не есть тождественный нуль, оно будет давать решение рассматриваемой задачи.

В трактатах электростатики указывают теорему, согласно которой, *в случае возможности задачи, может существовать у нее лишь одно решение.*

Разумеется, что эта теорема справедлива лишь при некоторых ограничениях.

Если мы допускаем лишь *непрерывные* решения k, то можно доказать эту теорему с полной строгостью известными методами [9]. Но если не делать этого ограничения, то можно доказать эту теорему лишь указывая наперед точно характер поведения функции k в местах разрыва.

Мы не будем останавливаться на этом вопросе, так как в дальнейшем нами рассматриваются только непрерывные решения.

через p в первом случае и через p' во втором. В то же самое время, рассматривая функцию одной точки поверхности S и обозначая через f ее значение в точке p, мы будем обозначать ее значение в p' через f'.

Мы ограничимся лишь указанием следующего предложения.

Уравнение (13), при условии

$$\int kds = \text{данному количеству,}$$

может иметь лишь одно непрерывное решение.

9

Возьмем последовательность функций

$$v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots,$$

определенную в п. 7.

Две соседние функции этой последовательности связаны уравнением

$$v_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{v'_{m-1} \cos \varphi'}{r^2} ds',$$

и все эти функции будут полностью определены, если задаться функцией v_0.

Но, вместо того, чтобы задавать эту функцию непосредственно, мы определим ее формулой

$$v_0 = \int \frac{k_0' ds'}{r},$$

причем k_0 есть данная функция, которую мы будем считать не только непрерывной на S, но и удовлетворяющей условию, аналогичному условию (6),

$$|k_0 - k_0'| < N_0 r^{\beta_0}, \tag{14}$$

где N_0, β_0 суть положительные числа, не зависящие от положения точек p, p'.

Указанные выше функции определены лишь в точках поверхности S. Но, отправляясь от этих функций, можно построить другую последовательность функций

$$V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots,$$

определенных во всех точках пространства E_i, внутреннего по отношению к поверхности S.

Мы будем определять эти функции по условию, чтобы они представляли в области E_i решения задачи Дирихле, сводящиеся на S соответственно к функциям

$$v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots.$$

Тогда мы будем иметь

$$V_0 = \int \frac{k'_0\, ds'}{R},$$

и, в силу первой из формул (10), получим

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{v'_{m-1} \cos \Phi'}{R^2} ds' - V_{m-1}. \tag{15}$$

С помощью этой формулы, полагая в ней последовательно $m = 1, 2, 3, \ldots$, мы определим, шаг за шагом, все функции V_m.

Предположим теперь что нам удалось для рассматриваемой поверхности доказать принцип Неймана.

Тогда мы будем иметь неравенство (12), и так как, согласно известной теореме, все значения функции V_m находятся между наименьшим и наибольшим значениями функции v_m, то будем иметь также

$$|V_m - C| < L\lambda^m$$

для всех точек области E_i.

Но, так как $\lambda < 1$, то отсюда следует, что, при m неограниченно растущем, функция V_m будет стремиться к постоянному числу C.

Но функция V_m может быть представлена, как мы это сейчас покажем, в виде потенциала простого слоя, непрерывной плотности k_m, распределенной на поверхности S

$$V_m = \int \frac{k_m' \, ds'}{R}. \tag{16}$$

Следовательно, если удастся доказать, что при m, неограниченно возрастающем, эта плотность равномерно стремится к пределу, отличному от тождественного нуля, то возможность задачи электростатики будет установлена, так как этот предел будет изображать функцию k, для которой интеграл

$$\int \frac{k' \, ds'}{R}$$

будет сохранять постоянное значение в области E_i, что же касается условия

$$\int k ds = \text{данному количеству},$$

то ему можно будет всегда удовлетворить подходящим выбором функции k_0.

10

Чтобы доказать формулу (16), предположим, что мы уже доказали следующую формулу

$$V_{m-1} = \int \frac{k'_{m-1} \, ds'}{R}$$

и что плотность k_{m-1} этого потенциала удовлетворяет условию

$$| k_{m-1} - k'_{m-1} | < N_{m-1} r^{\beta_{m-1}},$$

где N_{m-1}, β_{m-1} суть положительные числа, не зависящие от положения точек p, p'.

Тогда, как мы это видели в п. 4, производные

$$\frac{\partial V_{m-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_{m-1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_{m-1}}{\partial z}$$

будут определенными и непрерывными в области E_i, *вплоть до поверхности* S.

Следовательно, мы сможем приложить к функции V_{m-1} известную формулу Грина, которая даст

$$V_{m-1} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{v'_{m-1} \cos \Phi'}{R^2} ds' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'} \frac{ds'}{R};$$

здесь $\frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'}$ есть значение внутренней нормальной производной функции V_{m-1} в точке p'.

Но, в силу этого, формула (15) изобразится так:

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + V_{m-1},$$

что можно представить в виде (16), если положить

$$k_m = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial V_{m-1}}{\partial n} + k_{m-1}.$$

Кроме того, в силу (5), это выражение k_m примет вид

$$k_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k'_{m-1} \cos \varphi}{r^2} ds', \tag{17}$$

откуда вытекает, благодаря доказанному в п. 5, что

$$|k_m - k_m'| < N_m r^{\beta_m}, \tag{18}$$

где N_m, β_m суть числа той же природы, как и N_{m-1}, β_{m-1}.

Следовательно, формула (16) и неравенство (18), будучи верными для какого-нибудь m, будут верными также и для значения на единицу бо́льшего.

Но, согласно допущению, функция V_0 уже имеет вид (16) с условием (14).

Следовательно, формула (16) и непрерывность функции k_m установлены.

Кроме того, мы получили формулу (17), позволяющую вычислить k_m, отправляясь от k_0.

Отметим, что эта формула показывает, независимо от принципа Неймана, что в нашем исследовании достаточно установить существование предела k для k_m и равномерную сходимость к этому пределу. В самом деле, из формулы (17) вытекает, что этот предел необходимо будет удовлетворять уравнению (13).

Наконец, чтобы удовлетворить условию

$$\int k ds = g,$$

где g есть заряд проводника, надо лишь взять за k_0 функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\int k_0 \, ds = g.$$

Действительно, в силу (17), имеем

$$\int k_m \, ds = \int k'_{m-1} \, ds',$$

и, следовательно, при любом m

$$\int k_m ds = \int k_0 ds.$$

Установив это, докажем существование предела k, основываясь на принципе Неймана.

11

Прежде всего, легко убедиться, что функция V_m может быть представлена в виде потенциала двойного слоя, расположенного на S.

С этой целью заметим, что, в силу (12), ряд

$$(v_m - v_{m+1}) + (v_{m+2} - v_{m+3}) + (v_{m+4} - v_{m+5}) + \dots$$

равномерно сходится во всех точках поверхности S.

Рассматриваемый ряд определяет, следовательно, некоторую функцию и, так как его члены непрерывны на S, эта функция будет, в силу равномерной сходимости, также непрерывной.

Обозначая эту функцию через μ_m, положим

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mu_m' \cos \Phi'}{R^2} \, ds'. \tag{19}$$

При этом W_m будет представлять некоторую гармоническую функцию в области E_i, и эта функция будет приводиться на S, в силу (10), к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\mu_m' \cos \varphi'}{r^2} \, ds' + \mu_m.$$

Но первый член этого выражения, в силу формулы

$$\mu_m = (v_m - v_{m+1}) + (v_{m+2} - v_{m+3}) + \dots \tag{20}$$

и уравнений, связывающих v_m, равен [10]

$$(v_{m+1} - v_{m+2}) + (v_{m+3} - v_{m+4}) + \dots = v_m - \mu_m - C.$$

Итак, функция W_m приводится на S к

$$v_m - C$$

и, следовательно, для всех точек области E_i имеем

$$V_m = W_m + C. \tag{21}$$

Впрочем, это непосредственно дает известный метод Неймана.

Установив это, возьмем какую-нибудь точку p поверхности S и точку P области E_i, расположенную на нормали n в точке p. Далее, предполагая, что расстояние $\zeta = Pp$ достаточно мало $\left(\text{меньше, например, чем } \frac{1}{2} D\right)$, рассмотрим выражения

$$\left(\frac{\partial V_m}{\partial n}\right)_P \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial W_m}{\partial n}\right)_P,$$

причем V_m, W_m определены формулами (16) и (19).

Пусть K_m будет каким-либо верхним пределом функции $|k_m|$.

В силу (9) и (17) будем иметь

$$|k_m - k'_m| < HK_{m-1} r^{\beta},$$

причем H не зависит ни от числа m, ни от положения точек p, p', и β определяется формулой

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}.$$

Отсюда неравенство (7) дает

$$\left| \left(\frac{\partial V_m}{\partial n}\right)_P - 2\pi(k_{m+1} - k_m) \right| < (AK_m + BK_{m-1}) \zeta^{\beta},$$

где A, B суть числа того же рода, как и H, и из этого неравенства выводим

$$2\pi |k_{m+1} - k_m| < (AK_m + BK_{m-1}) \zeta^{\beta} + \left| \left(\frac{\partial V_m}{\partial n}\right)_P \right|.$$

С другой стороны, в силу (12), имеем

$$|v_m - v_{m+1}| < L\left(\lambda^m + \lambda^{m+1}\right),$$

и, следовательно, (20) дает

$$|\mu_m| < \frac{L}{1 - \lambda} \lambda^m.$$

Отсюда, в силу (11), будем иметь

$$\left|\left(\frac{\partial W_m}{\partial n}\right)_p\right| < G\,\frac{\lambda^m}{\zeta},$$

где G есть постоянное число, не зависящее ни от числа m, ни от положения точки p.

Но, в силу (21),

$$\left(\frac{\partial W_m}{\partial n}\right)_p = \left(\frac{\partial V_m}{\partial n}\right)_p .$$

Следовательно, имеем

$$2\pi\,|k_{m+1} - k_m| < (AK_m + BK_{m-1})\,\zeta^\beta + G\,\frac{\lambda^m}{\zeta},$$

и это неравенство, первая часть которого совершенно не зависит от ζ, будет справедливо также, если взять

$$\zeta = c\lambda^{\frac{m}{1+\beta}},$$

где c есть какое-нибудь положительное число.

Следовательно, полагая

$$\lambda^{\frac{\beta}{1+\beta}} = \lambda_1,$$

будем иметь неравенство вида

$$|k_{m+1} - k_m| < (l + q'K_m + q''K_{m-1})\,\lambda_1^m, \tag{22}$$

где l, q', q'' суть положительные числа, не зависящие ни от числа m, ни от положения точки p.

Из этого неравенства вытекает, что

$$|k_{m+1}| < |k_m| + (l + q'K_m + q''K_{m-1})\,\lambda_1^m.$$

Отсюда видно, что, начиная с $m = 1$, можно принять

$$K_{m+1} = K_m + (l + q'K_m + q''K_{m-1})\,\lambda_1^m.$$

Но тогда, начиная с того же значения m, будем иметь $K_{m+1} > K_m$ и, следовательно, полагая $q' + q'' = q$, получим

$$K_{m+1} < (1 + q\lambda_1{}^m) K_m + l\lambda_1{}^m.$$

Это неравенство будет иметь место, начиная с $m = 2$. Но выбирая соответственным образом K_0 и K_1, можно принять его, начиная с $m = 0$.

Тогда, замечая, что наше неравенство может быть переписано так:

$$K_{m+1} + \frac{l}{q} < (1 + q\lambda_1{}^m)\left(K_m + \frac{l}{q}\right),$$

выводим из него

$$K_{m+1} + \frac{l}{q} < \left(K_0 + \frac{l}{q}\right)(1+q)(1+q\lambda_1)(1+q\lambda_1{}^2)\ldots(1+q\lambda_1{}^m).$$

Но λ_1 меньше единицы. Следовательно, бесконечное произведение

$$(1+q)(1+q\lambda_1)(1+q\lambda_1{}^2)(1+q\lambda_1{}^3)\ldots$$

сходится и, если обозначить его значение через Q, то указанное выше неравенство даст

$$K_{m+1} + \frac{l}{q} < \left(K_0 + \frac{l}{q}\right)Q.$$

Следовательно, при любом m число K_m остается меньше, чем

$$\left(K_0 + \frac{l}{q}\right)Q - \frac{l}{q},$$

и, в силу этого, неравенство (22) позволяет вывести следующее:

$$|k_{m+1} - k_m| < L_1 \lambda_1{}^m, \tag{23}$$

где

$$L_1 = (l + qK_0)Q.$$

Из этого видно, что ряд

$$k_0 + (k_1 - k_0) + (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) + \dots \qquad (24)$$

сходится. Кроме того, в силу независимости L_1 и λ_1 от положения точки p, его сходимость будет равномерной для всех точек поверхности S.

Итак, этот ряд дает функцию k, вполне определенную на поверхности S, и, так как сумма $m+1$ члена равна k_m, то отсюда видно, что, при m неограниченно возрастающем, k_m будет равномерно стремиться к функции k.

Это мы и хотели доказать.

12

Функция k, как это следует из ее определения посредством ряда (24), непрерывна во всех точках поверхности S. Кроме того, в силу (17) и *равномерного* стремления k_m к пределу k, эта функция k будет удовлетворять уравнению (13).

Таким образом, мы доказали, что в случае поверхностей, которые мы рассматриваем здесь, уравнения

$$k = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k' \cos \varphi}{r^2} ds', \quad \int k ds = g,$$

в которых g есть какое-нибудь заданное количество, всегда допускают непрерывное решение и, как мы это уже отмечали, это решение — единственное.

В тоже самое время мы установили, что это решение может быть получено следующим методом.

Возьмем какую-нибудь ограниченную функцию k_0, удовлетворяющую условию

$$\int k_0 ds = g.$$

Построим затем, отправляясь от этой функции, неограниченную последовательность функций

$$k_1, k_2, k_3, k_4, \dots.$$

определяемых одна за другой по формуле

$$k_m' = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k_{m-1}' \cos \varphi}{r^2} ds',$$

и искомое решение получится как предел функций k_m, при m неограниченно возрастающем.[1]

В этом и состоит метод, предложенный Робэном для решения рассматриваемой задачи.

Принцип, из которого вытекает этот метод, заключается в том, что функции k_m удовлетворяют неравенству

$$|k_{m+1} - k_m| < L_1 \lambda_1^m,$$

где L_1, λ_1 суть положительные постоянные числа, не зависящие от числа m и, кроме того, λ_1 меньше единицы и не зависит от функции k_0.

Сейчас мы показали, что для поверхностей, удовлетворяющих условиям п. 1, этот принцип является необходимым следствием принципа Неймана.

13

Случай, когда

$$\int k_0 ds = 0,$$

заслуживает особого внимания.

---

[1] При доказательстве мы наложили на k_0 некоторое ограничение, а именно: эта функция должна была удовлетворять неравенству (14). Но легко заметить, что от этого ограничения можно освободиться. Действительно, какова бы ни была функция k_0, лишь бы она была интегрируемой (и, следовательно, ограниченной), функция k_1 будет удовлетворять неравенству (18) и, следовательно, может играть, при доказательстве, роль функции k_0.

В этом случае непрерывная функция k, к которой приводит вышеуказанный метод, будет удовлетворять уравнениям

$$k = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k' \cos \varphi}{r^2} ds', \quad \int k ds = 0$$

и будет, в силу этого, тождественным нулем [11].

Но, эта функция равна сумме ряда

$$k_m + (k_{m+1} - k_m) + (k_{m+2} - k_{m+1}) + \ldots$$

Следовательно, будем иметь

$$k_m = (k_m - k_{m+1}) + (k_{m+1} - k_{m+2}) + \ldots,$$

и отсюда, в силу (23), заключаем, что

$$|k_m| < \frac{L_1}{1 - \lambda_1} \lambda_1^m.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае, ряд

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

будет абсолютно и равномерно сходящимся, и его сходимость будет более сильной, чем геометрической прогрессии со знаменателем λ_1.

14

Рассмотрим снова задачу электростатики.

Из уравнения (13), которому удовлетворяет плотность k, видно, что эта функция будет удовлетворять условию (6), если положить в нем

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}.$$

Следовательно, в силу доказанного в п. 4, потенциал

$$V = \int \frac{k' \, ds'}{R}$$

будет допускать определенные предельные значения для своих производных

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

всякий раз, как точка $P(x, y, z)$ будет неограниченно приближаться к определенной точке поверхности S, оставаясь всегда в пространстве E_e, внешнем к этой поверхности.

Следовательно, мы приходим к такому заключению В том частном случае задачи Дирихле, когда рассматриваемая область есть все пространство, внешнее к поверхности S, и когда искомая гармоническая функция приводится на S к постоянному числу, эта функция будет допускать во всех точках поверхности S не только нормальную производную, но также и определенные предельные значения для трех своих частных производных по отношению к координатам. Кроме того, эти значения будут являться непрерывными функциями на поверхности S.

Мы изучим теперь аналогичные вопросы для общей задачи Дирихле.

ГЛАВА III

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

15

Мы будем рассматривать задачу Дирихле как для пространства E_i, внутреннего к S, так и для пространства E_e, внешнего по отношению к этой поверхности.

Пусть f есть данная функция, к которой должна сводиться на S искомая гармоническая функция V.

Предполагая, что f непрерывна на S, и допуская всегда, что принцип Неймана приложим к рассматриваемой поверхности, мы будем искать те условия, при которых существует нормальная производная функции V во всех точках поверхности S. Затем мы укажем также условия, обеспечивающие существование предельных значений для производных

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

при стремлении точки $P(x, y, z)$ к какой-нибудь точке поверхности S.

Это последнее условие будет относиться исключительно к функции f, так что теорема будет приложима к общему случаю рассматриваемых здесь поверхностей.

Что же касается исследования, относящегося только к нормальной производной, в предположении, что производ-

ные по координатам могут и не иметь предельных значений на S, то мы сможем провести это только при некоторых добавочных ограничениях, относящихся к поверхности S, и предположение, на котором мы остановимся, будет заключаться в том, что число α, введенное в п. 1, равно 1.

При соблюдении этого условия, возможно построить вблизи S два семейства замкнутых поверхностей, называемых *параллельными*, не имеющих кратных точек и как угодно близких к S, причем, одно из этих семейств будет содержать поверхности S_i, внутренние к S, а другое — внешние к S.

Чтобы убедиться в этом, надо воспользоваться лишь неравенствами п. 1, полагая в них $\alpha = 1$ и применяя их к известным формулам

$$X = x \pm \zeta \cos(n, x),$$
$$Y = y \pm \zeta \cos(n, y),$$
$$Z = z \pm \zeta \cos(n, z),$$

устанавливающим соответствие между точками $p(x, y, z)$ поверхности S и точками $P(X, Y, Z)$ параллельной поверхности, причем n есть направление нормали к S в точке p и ζ — неизменное положительное число, равное расстоянию между точками p и P.

Рассматривая эти формулы, легко убедиться, что если число ζ удовлетворяет неравенствам

$$\zeta < D, \quad 2a\zeta < 1$$

(в предположении $aD \leqslant 1$, к которому приводится предположение $aD^{\alpha} \leqslant 1$ п. 1), то геометрическое место точек P будет представлять замкнутую поверхность без кратных точек, не имеющую ни одной общей точки с S и допускающую определенную касательную плоскость в каждой из своих точек, причем эта плоскость параллельна касательной плоскости к поверхности S в соответствующей точке [12].

Заметив это, рассмотрим нормальную производную какой-нибудь функции в точке P, принадлежащей одной из пост-

роенных сейчас поверхностей, и допустим, что ζ стремится к нулю.

Точка P будет стремиться к p и, так как нормали к S и к рассматриваемой поверхности в точках p и P совпадают, то изучаемая производная будет стремиться, если она имеет предел, к нормальной производной той же функции в точке p поверхности S.

Это замечание позволит нам, как мы это сейчас увидим, применять, при некотором условии, формулу Грина и другие аналогичные формулы, вытекающие из преобразования интеграла по объему в интеграл по поверхности.

16

Предположим, что для одной из двух областей E_i, E_e мы нашли гармоническую функцию V, приводящуюся на S к данной функции f, предполагаемой непрерывной на S,[1] и что эта гармоническая функция допускает нормальную производную $\frac{\partial V}{\partial n}$ в каждой точке p поверхности S.

Найдем условие, которому должна удовлетворять для этого функция f.

Чтобы выполнить это исследование, мы должны ввести, однако, некоторое ограничение.

Предполагая, что нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ существует во всех точках поверхности S, мы допускаем лишь, что при любом положении точки p, разность

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - \frac{\partial V}{\partial n}$$

стремится к нулю вместе с расстоянием $Pp = \zeta$, причем точка P лежит на нормали n в точке p.

[1] Говоря, что функция V, определенная в одной из двух областей E_i, E_e, приводится на S к функции f, мы понимаем под этим, что $V - f$ стремится к нулю, когда точка $P(x, y, z)$ неограниченно приближается к точке p поверхности S по кривой, находящейся целиком в рассматриваемой области.

Но этого нам не будет еще достаточно, и мы должны будем предполагать, что рассматриваемая разность стремится к нулю *равномерно* для всех точек поверхности S.

Если некоторая функция будет обладать этим свойством, мы будем говорить, что ее нормальная производная *правильная* на S.

Таковым будет, например, случай потенциала простого слоя, расположенного на S *с непрерывной плотностью* на этой поверхности; в этом легко убедиться рассмотрением формул, выведенных в главе 1.[1]

Итак, предположим, что нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ правильная на S. Тогда она необходимо будет непрерывной функцией на этой поверхности.

Из этого выводим, кроме того, другое важное заключение; абсолютное значение выражения $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P$ для значений ζ, не превосходящих некоторого определенного предела (например, для $\zeta < \frac{1}{2}D$), будет допускать верхний предел, не зависящий ни от положения точки p, ни от ζ и, следовательно, значение V в точке P стремится, при ζ стремящемся к нулю, к своему пределу f *равномерно* для всех положений точки p [13]. При этих условиях мы можем применить к функции V формулу Грина, которой мы пользовались в п. 10.

Предположим, для определенности, что рассматривается пространство E_i внутреннее к S.

Тогда, при использованных уже обозначениях, мы будем иметь

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f'\cos\Phi'}{R^2}\,ds' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} \tag{25}$$

для всех точек области E_i, причем $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ есть значение $\frac{\partial V}{\partial n}$ в точке p'.

---

[1] Мы предполагали там, что плотность удовлетворяет условию (6). Но легко заметить, что для всего здесь сказанного это ограничение не является в какой-либо мере необходимым.

Действительно, для каждой точки области E_i, не находящейся на S, мы будем иметь аналогичную формулу, в которой интегралы будут распространяться на поверхность S_i, параллельную к S и достаточно к ней близкую. В этой новой формуле вместо f' и $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ будут находиться значения V и

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n',x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n',y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n',z)$$

в точке P' поверхности S_i, находящейся на нормали n' к поверхности S в точке p', и, если предположить, что поверхность S_i неограниченно приближается к S, то эти значения будут стремиться к f' и $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ равномерно для всех положений точки p'. Следовательно, в пределе, рассматриваемая формула дает формулу (25).

Установив это, рассмотрим функцию

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{f'\cos\Phi'}{R^2}\,ds'=W.$$

Как показывает формула (25), эта функция допускает внутреннюю нормальную производную $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$ в каждой точке p поверхности S, и, в силу первой из формул (5), эта производная имеет выражение

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i=\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds'.$$

Кроме того, на основании сказанного выше, эта производная правильна на S.

Но легко удостовериться, что функция W будет допускать также и внешнюю нормальную производную $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$, которая будет также правильной, и что эта производная будет равна $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$.

Чтобы показать это, рассмотрим для точек области E_e функцию, находящуюся во второй части формулы (25).

Эта функция будет в области E_e гармонической и на поверхности S она будет приводиться к

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{f'\cos\varphi'}{r^2}ds' - \frac{1}{2}f - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{r},$$

как это видно из второй формулы (10).

Но, в силу первой из этих формул, формула (25) дает

$$f = \frac{1}{4\pi}\int\frac{f'\cos\varphi'}{r^2}ds' + \frac{1}{2}f - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{r}.$$

Итак, рассматриваемая функция приводится на S к нулю, и, следовательно, она есть тождественный нуль в области E_e.

Следовательно,

$$W = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R}$$

во всех точках пространства E_e, и отсюда видно, что производная $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ существует и что она — правильная на S. Кроме того, в силу второй из формул (5), находим

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{\cos\varphi}{r^2}ds' + \frac{\partial V}{\partial n},$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i.$$

Мы рассмотрели вопрос для области E_i.

Если бы мы хотели рассмотреть этот же вопрос для области E_e, то исходили бы из формулы

$$V = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} - \frac{1}{4\pi}\int\frac{f'\cos\Phi'}{R^2}ds',$$

которую установили бы методом, указанным для формулы (25), и пришли бы к результату, тождественному с предыдущим.

Итак, в обоих случаях, существование и правильность нормальной производной $\frac{\partial V}{\partial n}$ требует, чтобы функция W обладала двумя нормальными производными $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$, правильными на S, и чтобы эти производные были всегда равны друг другу.

Мы покажем теперь, что это необходимое условие есть в то же время и достаточное.

17

Начнем с задачи, относящейся к области E_i.

Пусть будет

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L,$$

причем обе нормальные производные считаются правильными на S.

Тогда L будет представлять непрерывную функцию на S, и эта функция будет необходимо удовлетворять условию

$$\int L ds = 0, \tag{26}$$

как это видно из равенства

$$\int \left[\frac{\partial W}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial W}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial W}{\partial z}\cos(n, z)\right] ds_i = 0,$$

имеющего место для всякой поверхности S_i, параллельной S и достаточно близкой к этой поверхности (интеграция распространяется на все элементы ds_i поверхности S_i).

Установив это, рассмотрим уравнение

$$h + \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi}{r^2} ds' = L, \tag{27}$$

где h есть неизвестная функция.

Легко получить решение этого уравнения в виде ряда.

Действительно, рассмотрим неограниченную последовательность функций

$$h_0, h_1, h_2, \ldots,$$

определяемых одна из другой по формуле

$$h_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{h'_{m-1} \cos \varphi}{r^2} ds'$$

в предположении, что

$$h_0 = L.$$

В силу (26), будем иметь

$$\int h_0 ds = 0,$$

и, следовательно, на основании результатов п. 13, ряд

$$h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots$$

будет сходящимся, и его сходимость будет равномерной для всех точек поверхности S. Этот ряд представляет, следовательно, некоторую непрерывную функцию на S, и непосредственно видно, что эта функция удовлетворяет уравнению (27).

Итак, положим

$$h = h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots$$

и, отправляясь от этого значения h, рассмотрим выражение

$$U = \frac{1}{2} W - \frac{1}{4\pi} \int \frac{h' \, ds'}{R}.$$

Это есть гармоническая функция в каждой из двух областей E_i, E_e.

Но, рассматривая ее в области E_e, находим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e = \frac{1}{2} L - \frac{1}{4\pi} \int \frac{h' \cos\varphi}{r^2} ds' - \frac{1}{2} h,$$

что, в силу (27), сводится к нулю. Кроме того, видно, что эта нормальная производная правильная на S [14].

Итак функция U, которая обращается в нуль в бесконечности, равна нулю тождественно в области E_e. Это вытекает из рассмотрения интеграла

$$\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

распространенного на все элементы $d\tau$ пространства, внешнего к поверхности S_e, параллельной поверхности S, причем поверхность S_e неограниченно приближается к поверхности S.

Итак,

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \frac{h' \, ds'}{R}$$

во всех точках пространства E_e, и, следовательно, для всех точек поверхности S имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{h' \, ds'}{r_1} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f' \cos\varphi'}{r^2} ds' - f.$$

Но гармоническая функция, представляющая U в области E_i, сводится на поверхности S к

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{f' \cos\varphi'}{r^2} ds' + \frac{1}{2} f - \frac{1}{4\pi} \int \frac{h' \, ds'}{r},$$

и вышеуказанное равенство показывает, что это выражение приводится к f.

Итак формула

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f' \cos\Phi'}{R^2} ds' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{h' \, ds'}{R}$$

определяет в области E_i гармоническую функцию, приводящуюся к f на поверхности S, и эта функция допускает пра-

вильную нормальную производную на S. Что же касается значения этой производной, оно равно, в силу (27), функции h.

18

Рассмотрим теперь задачу для области E_e.

Допуская, как и в предыдущем параграфе, равенства

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L$$

предположении, что обе нормальные производные правильные на S, мы возьмем в качестве отправной точки уравнение

$$h - \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi}{r^2} ds' = -L, \qquad (28)$$

где h есть неизвестная функция.

Непосредственно видно, что это уравнение допускает в качестве решения

$$h = -h_0 - h_1 - h_2 - \ldots,$$

причем h_0, h_1, $h_2, \ldots$ суть те же функции, что и в предыдущем параграфе.

Это есть решение, непрерывное на S, но оно не единственное.

Чтобы определить общее непрерывное решение, обозначим через k непрерывную функцию, опредленную уравнениями

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\varphi}{r^2} ds'; \qquad \int k ds = 1\cdot$$

Существование этой функции было установлено в предыдущей главе.

Тогда искомое решение будет даваться формулой

$$h = Ck - h_0 - h_1 - h_2 - \ldots,$$

где C есть произвольное постоянное число.

Теперь, принимая для h это значение, рассмотрим следующее выражение:

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' ds'}{R} - \frac{1}{2} W,$$

определяющее гармоническую функцию в каждой из двух областей E_i, E_e; эта функция, в силу непрерывности h, будет допускать правильную нормальную производную на S.

Рассматривая эту функцию в области E_i, находим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \cos\varphi}{r^2} ds' - \frac{1}{2} h - \frac{1}{2} L,$$

что равно нулю, в силу уравнения (28).

Отсюда заключаем, что U сохраняет постоянное значение в области E_i. Это постоянное значение будет зависеть от C, и если обозначить через A_0 значение U при $C = 0$, то его общее выражение будет

$$A_0 + A_1 C,$$

где A_1 есть постоянное значение интеграла

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{k' ds'}{R}$$

в области E_i.

Но число A_1, очевидно, отлично от нуля. Следовательно, возможно распорядиться постоянным C так, чтобы было

$$A_0 + A_1 C = 0,$$

и если остановиться на этом предположении, то функция U будет равна нулю во всех точках области E_i, что дает

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{h' ds'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'}{r^2} ds' = \frac{1}{2} f$$

для всех точек поверхности S.

Но тогда гармоническая функция, которую представляет U в области E_e, будет приводиться на S к

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{h' ds'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'}{r^2} ds' + \frac{1}{2} f = f.$$

Следовательно, формула

$$V=\frac{1}{4\pi}\int\frac{h'\,ds'}{R}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{f'\cos\Phi'}{R^2}\,ds',$$

рассматриваемая в области E_e, будет определять гармоническую функцию, приводящуюся к f на поверхности S, и эта функция будет допускать правильную нормальную производную на S. Кроме того, видно, что эта производная равна h.

19

Мы приняли, что поверхность S удовлетворяет условиям п. 1 в предположении $\alpha=1$ и что принцип Неймана к ней приложим, и в этих условиях мы пришли к следующему результату:

Рассмотрим задачу Дирихле для любой из двух областей E_i, E_e; чтобы искомая гармоническая функция V, сводящаяся на поверхности S к непрерывной функции f, допускала правильную нормальную производную на S, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$W=\frac{1}{2\pi}\int\frac{f'\cos\Phi'}{R^2}\,ds'$$

допускала две нормальные производные $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$, которые были бы, равным образом, правильными на S, и чтобы, сверх того, имело место равенство

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i=\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$$

для всех точек поверхности S.

В силу этого, изыскание, относящееся к нормальной производной функции V (эта производная предполагается правильной на S), приводится к аналогичному изысканию для функции W, являющейся потенциалом двойного слоя плотности $\frac{f}{2\pi}$.

Разумеется, что невозможно дать условия, необходимые и достаточные для существования, правильности и равенства двух нормальных производных функции W. Но возможно указать для этого условия достаточные — более или менее общие, или касающиеся функции f или относящиеся к поверхности S, и на этом мы теперь остановимся.

20

В заметке о потенциале, опубликованной в «Сообщениях Харьковского математического общества» (т. IV), я указал некоторые условия, обеспечивающие существование и равенство нормальных производных функции W.

Среди прочих условий, я принял существование кривизны у нормальных сечений поверхности S. Но более внимательное рассмотрение вопроса показало, что это ограничение — ненужное, и что относительно S достаточно принять допущения п. 1 с тем лишь ограничением $\alpha = 1$, которое было введено в п. 15.

Это мы сейчас и покажем, принимая относительно f то же ограничение, которое было сделано в упомянутой заметке.

Это ограничение, распространенное на все точки поверхности S, мы выскажем так:

Рассмотрим какую-нибудь точку p_0 поверхности S и значения f в точках, расстояние которых от точки p_0 не превосходит D (п. 1). Затем, беря точку p_0 за полюс полярных координат в касательной плоскости к поверхности в p_0 (радиус-вектор есть ρ, полярный угол ψ) будем рассматривать значение f в точке p как функцию координат ρ, ψ проекции точки p на касательную плоскость. Тогда, если положить

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f d\psi = \bar{f}$$

и обозначить через f_0 значение f в точке p_0, то допустим, что можно будет назначить два положительных числа b и

b, не зависящих от ρ и от положения точки p_0 и таких, чтобы было

$$|\bar{f}-f|<b\rho^{\beta+1} \tag{29}$$

при сколь угодно малом ρ.

В этих условиях мы установим не только существование и равенство нормальных производных W во всех точках поверхности S, но также и правильность этих производных на S.

Пусть P_0 — точка пространства, лежащая на нормали к S в p_0, и ζ — расстояние $P_0\,p_0$, считаемое положительным в случае, когда направление p_0P_0 есть направление внутренней нормали по отношению к S, и считаемое отрицательным в противоположном случае.

Приняв это, рассмотрим значение W в точке P_0.

Для данного положения точки p_0, это будет функцией ζ, и наша задача приводится к тому, чтобы показать, что производная $\frac{dW}{d\zeta}$ этой функции при ζ, стремящемся к нулю, стремится к некоторому пределу, не зависящему от знака ζ, и что это стремление равномерно для всех положений точки p_0.

Пусть:

p — точка, принадлежащая к элементу поверхности ds;

Φ — угол, образуемый нормалью в точке p с направлением pP_0;

Φ_0 — угол нормали в p_0 с направлением P_0p;

ϑ_0 — угол двух нормалей в p и в p_0;

R_0 — расстояние P_0p.

Будем иметь [6]

$$\frac{dW}{d\zeta}=\frac{1}{2\pi}\int(\cos\vartheta_0+3\cos\Phi_0\cos\Phi)\frac{f\,ds}{R_0^3},$$

что можно представить еще в таком виде:

$$\frac{dW}{d\zeta}=\frac{1}{2\pi}\int(\cos\vartheta_0+3\cos\Phi_0\cos\Phi)\frac{(f-f_0)\,ds}{R_0^3}, \tag{30}$$

так как потенциал W, при замене в нем f постоянной величиной, сводится к постоянной в каждой из двух областей E_i, E_e.[1]

Возьмем теперь точку p_0 за начало координат и нормаль в этой точке за ось z и введем цилиндр C, рассмотренный в п. 3, с теми же предположениями относительно δ.

Пусть $\Omega(\zeta, \delta)$ будет значением второй части формулы (30), если интеграцию распространить на часть S_1 поверхности S, так что

$$\Omega(\zeta, 0)=\frac{dW}{d\zeta},$$

и $\Omega(\zeta, 0)-\Omega(\zeta, \delta)$ будет представлять вторую часть той же формулы при распространении интеграции на S_0.

Рассмотрим выражение $\Omega(\zeta, 0)-\Omega(\zeta, \delta)$.

Вводя вместо x, y полярные координаты ρ, ψ, мы будем иметь

$$\Omega(\zeta, 0)-\Omega(\zeta, \delta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta}\left(1+3\frac{\cos\Phi_0\cos\Phi}{\cos\vartheta_0}\right)\frac{(f-f_0)\rho d\rho}{R_0^3}.$$

Но имеем

$$\cos\Phi_0=\frac{z-\zeta}{R_0}; \qquad R_0=\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2},$$

и, если обозначить через r_0, φ значения R_0, Φ для $\zeta=0$, будем иметь

$$R_0\cos\Phi=r_0\cos\varphi+\zeta\cos\vartheta_0.$$

Следовательно, находим

$$1+3\frac{\cos\Phi_0\cos\Phi}{\cos\vartheta_0}=\frac{\rho^2-2\zeta^2}{R_0^2}+\frac{z^2+z\zeta}{R_0^2}+\frac{3(z-\zeta)r_0\cos\varphi}{R_0^2\cos\vartheta_0},$$

[1] Эта замена f на $f-f_0$, которой я не пользовался в цитированной заметке, дает, однако, большие упрощения. Я заимствую ее у Таубера (Tauber); см. его заметки, опубликованные в «*Monatshefte für Mathematik und Physik*» (1897, 1 Vierteljahr и 1898, 1 Vierteljahr).

и, вводя количество T п. 3 и полагая затем

$$(\rho^2-2\zeta)(T^5-1)+\left[z^2+z\zeta+3(z-\zeta)\frac{r_0\cos\varphi}{\cos\vartheta_0}\right]T^5=Q,$$

можно представить рассматриваемое выражение в таком виде

$$\Omega(\zeta, 0)-\Omega(\zeta, \delta)=\int_0^\delta \frac{(\bar{f}-f_0)(\rho^2-2\zeta^2)\rho d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi\int_0^\delta \frac{(f-f_0)Q\rho d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{r_0\cos\varphi}{\cos\vartheta_0}=\rho\frac{\partial z}{\partial\rho}-z,$$

и обратимся к формулам п. 1 и п. 3.

Неравенства (1) и (2), если положить в них $\alpha=1$, дают

$$\left|\frac{\partial z}{\partial\rho}\right|<4a\rho, \quad |z|<2a\rho^2.$$

Следовательно, имеем

$$\left|\frac{r_0\cos\varphi}{\cos\vartheta_0}\right|<6a\rho^2.$$

С другой стороны, формула

$$T^2-1=\frac{T^2(2z\zeta-z^2)}{\rho^2+\zeta^2},$$

если предположить δ столь малым, чтобы в области интеграции было $T<2$, дает [15]

$$|T-1|<\frac{4}{3}\frac{2|z||\zeta|+z^2}{\rho^2+\zeta^2}<\frac{16}{3}(a|\zeta|+a^2\rho^2).$$

Из этого видно, что можно указать два неизменных положительных числа A и B таких, чтобы в области интеграции иметь

$$|Q|<A|\zeta|(\rho^2+\zeta^2)+B(\rho^2+\zeta^2)^2.$$

Установив это, обозначим через η наибольшее значение, которого может достичь на S_0 функция $|f-f_0|$, и примем неравенство (29).

Тогда, замечая, что

$$|\zeta|\int_0^\delta \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}<1,$$

мы будем иметь

$$|\Omega(\zeta, 0)-\Omega(\zeta, \delta)|<\frac{2b}{\beta}\delta^\beta+(A+B\delta)\eta,$$

и это неравенство будет иметь место для всех значений ζ, за исключением $\zeta=0$.

В то же самое время мы будем, очевидно, иметь [16]

$$|\Omega(0, \varepsilon)-\Omega(0, \delta)|<\frac{b}{\beta}\delta^\beta+B\delta\eta$$

для всякого положительного числа ε, меньшего чем δ; это показывает, что, при δ стремящемся к нулю, количество $\Omega(0,\delta)$ стремится к некоторому пределу, и что, при обозначении этого предела через L_0, имеем

$$|\Omega(0, \delta)-L_0|<\frac{b}{\beta}\delta^\beta+B\delta\eta.$$

Следовательно, принимая во внимание тождество

$$\Omega(\zeta, 0)-L_0=\Omega(\zeta, 0)-\Omega(\zeta, \delta)+\Omega(0, \delta)-L_0+ \\ +\Omega(\zeta, \delta)-\Omega(0, \delta),$$

мы приходим к следующему неравенству:

$$|\Omega(\zeta, 0)-L_0|<\frac{3b}{\beta}\delta^\beta+(A+2B\delta)\eta+|\Omega(\zeta, \delta)-\Omega(0, \delta)|.$$

Но функция f непрерывна, в силу чего η будет стремиться, для $\delta=0$, к нулю. Кроме того, в виду равномерной непрерывности f на S, η будет стремиться к нулю равномерно для всех положений точки p_0.

С другой стороны, при сохранении δ неизменным и отличным от нуля, количество $|\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(0, \delta)|$ будет стремиться, для $\zeta = 0$, к нулю, и это стремление будет равномерным для всех положений точки p_0.

Отсюда заключаем, что при ζ, стремящемся к нулю, количество

$$\Omega(\zeta, 0) = \frac{dW}{d\zeta}$$

будет при любом знаке ζ стремиться к L_0 равномерно для всех положений точки p_0.

Наше предложение, таким образом, доказано, и, обращаясь к теореме предыдущего параграфа, видим, что в тех условиях, в которых мы находимся, гармоническая функция V будет допускать правильную нормальную производную на поверхности S.

Примечание. Из формул, которые мы нашли, выводим

$$|\Omega(\zeta, 0) - \Omega(-\zeta, 0)| < 2\ (A + B\delta)\eta + |\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(-\zeta, \delta)|,$$

и это показывает, что для всякой непрерывной функции f разность $\Omega(\zeta, 0) - \Omega(-\zeta, 0)$ стремится, для $\zeta = 0$, к нулю равномерно для всех точек поверхности S.

Итак, *какова бы ни была непрерывная функция f, если одна из двух нормальных производных $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ существует и правильна на S, то другая производная будет также обладать этими свойствами и эти производные будут равны.*

Принимая во внимание это предложение, можно было бы выразить теорему предыдущего параграфа более просто, а именно так:

Для того чтобы гармоническая функция V, сводящаяся на поверхности S к непрерывной функции f, допускала правильную нормальную производную на S, необходимо и достаточно, чтобы функция W обладала этим же свойством.

21

Теперь мы укажем для функции f некоторое условие, которое обеспечит как для W, так и для самой функции V, существование не только нормальных производных, но также и предельных значений, на поверхности S, производных по отношению к координатам. Кроме того, это условие позволит освободиться от ограничения $\alpha=1$, и в дальнейшем мы можем предполагать, что α есть какое-нибудь положительное число.

До сих пор мы рассматривали функцию f как определенную только для точек поверхности S. Теперь мы будем предполагать, что f есть значение на S некоторой данной функции F, определенной для всех точек пространства, достаточно близких к S, и условие, какое мы имеем в виду, будет относиться именно к этой функции F. Вот это условие.

Внутри каждой сферы $\sum$ неизменного радиуса D, с центром, расположенным на S, функция F и ее производные двух первых порядков по отношению к x, y, z — однозначны и непрерывны.

Легко показать, что это условие обеспечивает в каждой из двух областей E_i, E_e существование предельных значений на S производных $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$.

Чтобы показать это, рассмотрим какую-нибудь сферу $\sum$, предполагая радиус ее D настолькао малым, дабы он удовлетворял условиям п. 1, и чтобы производные двух первых порядков функции F имели определенные значения на самой поверхности $\sum$.

Поверхность S разделит пространство, внутреннее к $\sum$, на две части: пространство F_{i0}, внутреннее к S, и пространство E_{e0}, внешнее к S.

Рассмотрим какое-нибудь одно из этих двух пространств, например E_{i0}, которое ограничено частью $\sum$ поверхности $\sum$, внутренней к S, и частью S_0 поверхности S, внутренней к $\sum$.

Пусть будут:

ds' — элемент поверхности S_0;

$d\sigma'$ — элемент поверхности $\sum_i$;

$d\tau'$ — элемент объема пространства E_{i0};

p' — точка, принадлежащая либо элементу ds', либо элементу $d\sigma'$;

$P'(x', y', z')$ — точка, принадлежащая элементу $d\tau'$;

$P(x, y, z)$ — какая-нибудь точка пространства, не находящаяся на поверхности, ограничивающей E_{i0};

R — расстояние точки P или от точки p', или от точки P';

n' — направление нормали к S или к $\sum_i$ в точке p, внутрь E_{i0};

Φ' — угол, образуемый n' с направлением $p'P$;

F' — значение F в точке p' или в P';

$\frac{\partial F}{\partial n'}$ — значение выражения

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n', x)+\frac{\partial F}{\partial y}\cos(n', y)+\frac{\partial F}{\partial z}\cos(n', z)$$

у основания p' нормали n'.

Приняв это, мы будем пользоваться известными теоремами, позволяющими выразить интеграл

$$\int\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 F'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 F'}{\partial z'^2}\right)\frac{d\tau'}{R},$$

распространенный на пространство E_{i0}, с помощью интегралов, распространенных на поверхность, служащую границей E_{i0}.

Положим для краткости

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 F'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 F'}{\partial z'^2}=\Delta F'.$$

Тогда мы будем иметь:

Если точка P находится внутри пространства $E_{i\,0}$,

$$\int \frac{\Delta F' \, d\tau}{R} = \int \frac{f' \cos \Phi'}{R^2} ds' - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + \\ + \int \frac{F' \cos \Phi'}{R^2} d\sigma' - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{d\sigma'}{R} - 4\pi F,$$

и, если эта точка находится вне $E_{i\,0}$,

$$\int \frac{\Delta F' \, d\tau'}{R} = \int \frac{f' \cos \Phi'}{R^2} ds' - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + \\ + \int \frac{F' \cos \Phi'}{R^2} d\sigma' - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{d\sigma'}{R},$$

причем интегралы, относящиеся к ds' и к $d\sigma'$, распространяются, соответственно, на S_0 и на $\sum_i$.

Но, при настоящих обозначениях, имеем

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f' \cos \Phi'}{R^2} ds' + W_1,$$

где W_1 есть потенциал, обусловленный частью S, внешней по отношению к сфере $\sum$.

Следовательно, полагая

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta F' \, d\tau'}{R} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{d\sigma'}{R} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{F' \cos \Phi'}{R^2} d\sigma' + W_1 = U,$$

найдем для точек P, внутренних к $E_{i\,0}$,

$$W = 2F + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + U,$$

для точек же, внешних к $E_{i\,0}$,

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + U.$$

Заметим теперь, что в силу непрерывности и, следовательно, ограниченности производных второго порядка функции F внутри сферы $\sum$ при любом положении ее центра на S, можно назначить неизменный верхний предел для абсолютных значений количеств

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F'}{\partial x'}\right), \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F'}{\partial y'}\right), \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F'}{\partial z'}\right),$$

где r обозначает расстояние между точками $p(x, y, z)$ и $p'(x', y', z')$, к которым относятся значения производных, причем эти точки могут быть взяты произвольно на S.

Следовательно, можно будет найти определенное число A, такое, что [17]

$$\left|\frac{\partial F}{\partial n}-\frac{\partial F'}{\partial n'}\right|<Ar^{\alpha},$$

для произвольного положения точек p и p' на S, где α есть число, определенное в п. 1.

Отсюда следует, в силу рассмотрений п. 4, что первые производные потенциала

$$\int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{ds'}{R}$$

будут стремиться к определенным пределам, когда точка P, оставаясь все время в одной из двух областей $E_{i\,0}$, $E_{e\,0}$, будет неограниченно приближаться к точке p поверхности S, не находящейся на контуре поверхности S_0.

С другой стороны, видно, что функция U, как и ее частные производные первого порядка, — непрерывна внутри каждой сферы $\sum'$, концентрической с $\sum$ и внутренней к ней.

Следовательно, полученные формулы показывают, что производные $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ допускают определенные предельные значения в каждой точке поверхности S, внутренней к $\sum'$, и это имеет место для каждой из областей $E_{i\,0}$, $E_{e\,0}$.

Эти предельные значения будут, вообще говоря, различными для двух областей. Но, что касается нормальных производных, то формулы (5) ясно показывают, что будем иметь

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L,$$

где положено

$$L = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial F}{\partial n'} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds' + \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Мы рассматривали только точки, внутренние к $\sum'$. Но общий центр сфер $\sum$ и $\sum'$ может быть помещен где угодно на S.

Следовательно, производные $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ будут иметь предельные значения в каждой точке поверхности S, и производные $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$ и $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ будут всегда равны. Сверх того, как это легко видеть, эти нормальные производные будут правильными на поверхности S.

Что же касается общего значения L нормальных производных, заметим, что оно будет удовлетворять условию вида:

$$|L - L'| < br^{\beta}, \tag{31}$$

где b и β суть положительные числа, не зависящие от положения точек p, p', к которым относятся значения L, L'.

Действительно, данное выше выражение L показывает, что, в силу результатов п. 5, условие, о котором идет речь, будет выполнено, если имеем

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U'}{\partial n'}\right| < cr^{\gamma}$$

для всех положений точек p, p' на поверхности S, внутри $\sum'$, причем c и γ суть положительные числа, не зависящие от

положения этих точек, и последнее неравенство непосредственно вытекает из известных свойств потенциалов объема [18].

22

Приложим предыдущие результаты к задаче Дирихле.

Рассмотрим, например, задачу, относящуюся к области E_i.

Предполагается, что принцип Неймана приложим к поверхности S; тогда уравнение (27) определит непрерывную функцию h, и эта функция, в силу (31), будет удовлетворять условию вида

$$|h - h'| < cr^{\gamma},$$

где c, γ суть положительные числа, не зависящие от положения точек p, p'.

Следовательно, потенциал

$$\int \frac{h' ds'}{R}$$

будет допускать на S определенные предельные значения для своих производных первого порядка в каждой из двух областей E_i, E_e, и функция

$$U = \frac{1}{2} W - \frac{1}{4\pi} \int \frac{h' ds'}{R},$$

которую мы рассматривали в п. 17, будет обладать этим же свойством.

В силу этого, можно будет рассмотреть интеграл

$$\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

распространенный на пространство E_e, и значение этого интеграла будет равно интегралу

$$\int U \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_e ds,$$

распространенному на поверхность S.

Следовательно, равенство

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e = 0,$$

имеющее место для всех точек поверхности S, приведет к заключению, что $U=0$ во всех точках пространства E_e.

Но, установив это, мы приходим к формуле, полученной в конце п. 17, которая и дает решение задачи.

Совершенно таким же способом докажется и формула п. 18, которая дает решение задачи для области E_e, и эти формулы показывают, что предельные значения производных $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ существуют в каждой точке p поверхности S.

Кроме того, видно, что нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ правильная на S.

Таким образом, мы приходим к следующему предложению:

Пусть $F(x, y, z)$ будет функция однозначная и непрерывная, как и ее производные двух первых порядков, вблизи каждой точки поверхности S, и пусть f представляет значение F на поверхности S, тогда функция V, гармоническая в какой-нибудь из двух областей E_i, E_e и приводящаяся к f на S, будет допускать на S, для своих производных $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, определенные предельные значения, и ее нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ будет правильной на S.

Это предложение справедливо для всякой поверхности S, удовлетворяющей условиям п. 1, лишь бы к ней был приложим принцип Неймана.

23

Предыдущая теорема позволяет установить возможность задачи электростатики при достаточно общих условиях.

Рассмотрим проводник, ограниченный поверхностью S, удовлетворяющей указанным выше условиям, и предположим, что этот проводник, заряженный данным количеством g электричества, находится в присутствии тел плохой проводимости, расположенных вне S и несущих данные распределения электричества.

Требуется найти статическое распределение электричества на поверхности S.

Решение этой задачи зависит, как известно, от определения функции V, гармонической в области E_e, внешней к S и сводящейся на S к

$$C-U,$$

где U есть известная функция, представляющая потенциал электричества, которое несут плохие проводники, и C есть постоянная, которую следует определить под условием, чтобы заряд проводника был равен g.

Если функция V найдена, то возможность задачи зависит от существования нормальной производной $\frac{\partial V}{\partial n}$ на S. Но так как функция $C-U$ обладает всеми свойствами функции F, то это существование — вне сомнения, и плотность q электрического слоя, находящегося в равновесии на S, будет даваться формулой [19]

$$q=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial n}\right),$$

в которой вторая часть линейна по отношению к C, определяемому уравнением

$$\int q ds=g.$$

Кроме того, пользуясь свойствами, установленными в п. 18, можно определить q следующим прямым путем [20]:

Понимая под u' значение функции U в точке p' элемента ds', обозначим через L значение нормальной производной функции

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{u'\cos\Phi'}{R^2}ds'$$

в какой-нибудь точке p поверхности S. Далее, обозначим через h_0, h_1, h_2, ... функции, определяемые последовательно по формуле

$$h_m=\frac{1}{2\pi}\int\frac{h'_{m-1}\cos\varphi ds'}{r^2},$$

в предположении $h_0=L$, и введем функцию k, определенную в п. 18.

Тогда мы будем иметь

$$q=gk+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n}+L+h_1+h_2+h_3+\ldots\right).$$

24

Другое, не менее важное приложение относится к функции Грина.

Пусть E будет одной из двух областей E_i, E_e; P (x, y, z) и P' (x', y', z') — точки этой области и R — расстояние PP'.

Помещая точку P в определенном месте, не находящемся на S, обозначим через H функцию x', y', z', гармоническую в области E и сводящуюся на S к $\frac{1}{R}$. Тогда функция

$$G=\frac{1}{R}-H$$

будет представлять то, что называется *функцией Грина*, соответствующей полюсу P.

Функция G (как и R и H) будет зависеть не только от x', y', z', но также и от x, y, z, и если желательно при-

влечь внимание к этой точке, то можно будет обозначить эту функцию через

$$G(x', y' z'; x, y, z).$$

Известно, что большинство приложений, в которых присутствует функция G, требует рассмотрения предельных значений производных $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial z}$ на S, и что во многих случаях эта функция может быть полезной лишь при существовании этих значений.

Но, при допущениях, сделанных нами о поверхности S, их существование вне сомнения, так как функция $\frac{1}{R}$ будет обладать, в силу того, что полюс P не находится на S, всеми свойствами функции $F(x', y', z')$, и теорема п. 22 будет приложима.

Доказав существование этих предельных значений, можно воспользоваться, для изучения свойств функции G, известными методами, и известные предложения, которые относятся к этой функции, могут быть строго установлены.

Например, можно доказать основное равенство, данное Риманом [21],

$$G(x, y, z; \quad x', y', z') = G(x', y', z'; \quad x, y, z).$$

25

Заканчивая, остановимся на известной формуле, которая дает решение задачи Дирихле с помощью функции Грина.

Чтобы иметь для двух областей, E_i и E_e, одинаковые формулы, условимся приписывать нормали направление внутреннее, но не по отношению к E_i (как мы это делали до сих пор), а по отношению к той области E, которую мы рассматриваем.

Тогда для любой из этих областей формула Грина даст

$$V = \frac{1}{4\pi} \int f' \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R}\right) ds' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V'}{\partial n'} \frac{ds'}{R},$$

причем предполагается, разумеется, что функция f удовлетворяет условиям п. 21.

В этой формуле n' обозначает направление нормали в точке p', принадлежащей элементу ds', и $\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)$ есть значение, которое принимает выражение

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x'}\cos(n', x) + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y'}\cos(n', y) + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z'}\cos(n', z),$$

когда точка $P'(x', y', z')$ приходит в p'. В этом же смысле будут использованы также и обозначения $\frac{\partial H}{\partial n'}$, $\frac{\partial G}{\partial n'}$.

Приняв это и замечая, что, по самой природе функции H, имеем

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} = \int f' \frac{\partial H}{\partial n'} ds',$$

находим

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f' \frac{\partial G}{\partial n'} ds',$$

и это есть та формула, о которой идет речь.

Эта формула доказана только для того случая, когда функция f удовлетворяет условиям п. 21. Но она может быть обобщена на все случаи, когда f есть непрерывная функция.

Действительно, какова бы ни была f, рассматриваемая формула определяет некоторую гармоническую функцию в области E. Таким образом, остается лишь показать, что эта функция сводится на S к f, что можно сделать методом, аналогичным использованному Шварцем в случае интеграла Пуассона.

Непосредственное применение этого метода требовало бы исследования функции $\frac{\partial G}{\partial n'}$ в предположении, что точка P

бесконечно близка к точке p'.[1] Но мы можем избежать этого исследования, пользуясь теоремой п. 22.

С этой целью рассмотрим сначала частный случай, когда

$$f=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

где x_0, y_0, z_0 суть координаты какой-нибудь постоянной точки поверхности S, которую мы будем обозначать буквой p_0.

В этом случае, так как теорема, которую мы упомянули, приложима, данная выше формула даст решение задачи Дирихле, и, следовательно, функция V, определенная этой формулой, будет стремиться к f, когда точка P будет приближаться к точке $p(x, y, z)$ поверхности S.

Кроме того, если предположить, что точка P находится на нормали в точке p, и если через ζ обозначить расстояние Pp, то можно будет найти положительное число A, не зависящее от положения точки p и такое, что будем иметь

$$|V-f|<A\zeta.$$

В самом деле, это вытекает из того, что нормальная производная рассматриваемой функции V правильна на S.

Мы будем предполагать, что число A было выбрано независимо от положения точки p_0, что, очевидно, допустимо, так как f есть целая функция от x_0, y_0, z_0.

Приняв это, применим наше неравенство к точке p_0. Так как функция f сводится к нулю в этой точке, то мы будем иметь

$$V_0<A\zeta,$$

[1] Этот метод был недавно использован Зарембой. См. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale supérieure (3-e Serie, t. XIV, 1897, p. 251). Заметим, что Заремба рассматривает функцию u, которая есть не что иное, как $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial n'}$, не доказывая ее существования.

где V_0 есть значение V в точке P_0, расположенной на нормали на расстоянии ζ от точки p_0 (это значение, очевидно, положительно).

Заметим теперь, что для всех точек поверхности S имеем

$$\frac{\partial G}{\partial n'} \geqslant 0,$$

ибо функция G обращается в нуль на поверхности S и остается положительной во всех других точках области E.

Следовательно, будем иметь

$$V_0 > \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(1)} f' \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds'.$$

где интеграл распространяется на какую-нибудь часть S_1 поверхности S, и G_0 обозначает функцию Грина, соответствующую полюсу P_0.

Мы возьмем за S_1 часть S, внешнюю к сфере $\sum$ радиуса δ, имеющей центром точку p_0. Тогда указанное выше неравенство даст

$$V_0 > \frac{\delta^2}{4\pi} \int\limits_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds',$$

и мы будем иметь

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds' < A \frac{\zeta}{\delta^2} \cdot$$

Предположим теперь, что f есть какая-нибудь непрерывная функция и рассмотрим функцию V, определенную формулой, которой мы занимаемся.

Полагая

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial G}{\partial n'} ds' = \Omega$$

и обозначая через Ω_0, V_0 значения Ω, V в точке P_0 и через f_0 значение f в точке p_0, мы будем иметь

$$V_0 - f_0 = (\Omega_0 - 1) f_0 + \frac{1}{4\pi} \int (f' - f_0) \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds'.$$

Но, в области E_i имеем $\Omega = 1$, и в области E_e, за исключением точек поверхности S, имеем $\Omega < 1$. Следовательно, понимая под η наибольшее значение функции $|f' - f_0|$ внутри сферы $\sum$ и под M верхний предел функции $|f|$ на S, находим

$$|V_0 - f_0| < M(1 - \Omega_0) + \eta + \frac{M}{2\pi} \int\limits_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds'.$$

Кроме того, очевидно, имеем

$$1 - \Omega_0 < B\zeta,$$

где B есть некоторое положительное число, которое можно взять независимо от положения точки p_0.

Следовательно, получаем

$$|V_0 - f_0| < \eta + 2AM \frac{\zeta}{\delta^2} + BM\zeta.$$

Но, так как функция f непрерывна на S, количество η будет стремиться, при $\delta = 0$, к нулю, и это стремление будет равномерным для всех положений точки p_0.

Следовательно, полученное неравенство, в котором можно положить, например, $\zeta = c\delta^3$, показывает, что, при ζ стремящемся к нулю, V_0 стремится к f_0 равномерно для всех положений точки p_0.

Раз этот результат установлен, то непрерывность функции f обеспечивает стремление функции V к f_0 при стремлении точки P к точке p_0 по любой кривой.

Итак, в случае поверхностей, которые мы рассматривали, формула

$$V = \frac{1}{4\pi} \int f' \frac{\partial G}{\partial n'} ds'$$

дает действительно решение задачи Дирихле при любой непрерывной функции f, к которой должна сводиться на поверхности искомая гармоническая функция.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Чебышев в одном из своих мемуаров показал, как результаты его исследований о предельных величинах интегралов могут привести к доказательству известной теоремы Лапласа и Пуассона о вероятности, с которой сумма большого числа независимых случайных величин оказывается заключенной между данными пределами.

Известно, что эта теорема была предметом большого числа исследований. Между тем, попытки строгого доказательства ее при сколько-нибудь общих условиях оставались долгое время неудачными, и Чебышев был, насколько мне известно, первым, кто с успехом преодолел эту трудность.

Однако знаменитый ученый дал только набросок доказательства, и некоторые пункты его анализа требовали еще дополнительного исследования. Кроме того, в формулировке теоремы Чебышев указал, в сущности, только одно условие, а именно, что математические ожидания (вероятные значения) всех степеней переменных должны оставаться по абсолютному значению меньше некоторого предела, а между тем это условие не достаточно, как видно уже в частном случае закона больших чисел.

Поэтому, в некоторых отношениях, мемуар Чебышева требовал еще дополнений, и именно это сделал Марков в своей недавней, не оставляющей желать ничего лучшего, работе; уточнив вполне формулировку теоремы введением дополнительного условия, Марков дал также необходимое развитие самому доказательству.

Таким образом, в том, что касается строгости, замечательное доказательство, набросанное Чебышевым, проведено безупречно.

Несмотря на это, следует признать, что это доказательство, связанное со специальной теорией, является слишком сложным и громоздким. Оно не исключает, следовательно, необходимости дальнейших исследований, и прямое доказательство остается, во всяком случае, желательным.

Ввиду этого, мне казалось полезным пересмотреть прежние методы, применявшиеся в рассматриваемом вопросе.

Среди этих методов, одним из наиболее изящных, по моему мнению, является метод, основанный на использовании разрывного множителя; применение его к рассматриваемому вопросу было дано Глэшером (Glaisher).[1] Метод этот имеет хорошо известные преимущества. Но в том виде, в каком его развил Глэшер, он приводит к затруднениям и дает повод для многих возражений.

Желательно было, следовательно, вернуться к вопросу и найти такое изменение метода, которое позволило бы устранить затруднения, по крайней мере при известных условиях. Это является той задачей, которую я себе поставил и которую я попытался решить.

Я не знал вначале, что в этом направлении была уже сделана попытка Слешинским.[2] Однако, когда я впоследствии познакомился с нею, то увидел, что новые исследования не будут излишними, так как Слешинский, использовавший идеи Коши, делал слишком ограничительные предположения,

---

[1] Philosophical Magazine and Journal of Science, 4-e series, vol. XLIII, p. 194. — Memoirs of the Royal Astronomical Society, vol. XXXIX, p. 75. См. также: Czuber. Theorie der Beobachtungsfehler, S. 254.

[2] Записки Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, т. XIV, 1892.

и его анализ не представляется возможным распространить на более общие случаи.

Я поступал совершенно иначе, что позволило мне все более и более расширять условия, которыми я себя ограничивал, пока я не заметил, что принципиальная трудность вопроса может быть, с помощью одного искусственного приема, обойдена в самом общем случае.

Таким образом, мне удалось получить очень общий результат, доказывающий справедливость теоремы при условиях, значительно более общих, чем дополненные Марковым условия теоремы Чебышева, причем он получен мною с помощью анализа, не зависящего от какой-либо специальной теории, и основан только на самых элементарных соображениях.

Ввиду этих обстоятельств я счел полезным опубликовать мое доказательство и я излагаю его в настоящем мемуаре.

Однако я должен отметить, что рассматриваемый вопрос был также предметом исследований Некрасова, который уже опубликовал заметку, содержащую краткое изложение полученных им по этому вопросу результатов. Как можно судить по заметке, предположения, которые выставляет Некрасов, совершенно отличны от моих. Что касается его метода, то он еще не известен, так как Некрасов не опубликовал своего анализа. Во всяком случае, позволительно предположить, что этот метод далеко не элементарный, ибо, по словам Некрасова, он основан на общих исследованиях, касающихся ряда Лагранжа, которые были опубликованы им раньше.

1

Пусть

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

будет бесконечная последовательность независимых переменных.

Предполагается, что при каждом испытании эти переменные получают определенные значения, принадлежащие заданной совокупности вещественных чисел, но что, не зная этих значений, мы можем только вычислить для каждой из этих переменных вероятность, что она заключена между данными произвольными пределами. Предполагается, кроме того, что эта вероятность не зависит от значений других переменных; это условие включают иногда уже в понятие независимости переменных.

Приняв это, мы будем рассматривать вероятность, с которой сумма

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

будет заключаться между данными пределами, и относительно этой вероятности мы установим здесь следующую теорему:

Предполагая существование математических ожиданий величин

$$x_i,\ x_i^2,\ |x_i|^3\,*, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

и обозначая их соответственно через

$$\alpha_i,\ a_i,\ l_i, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

положим

$$a_1 - \alpha_1^2 + a_2 - \alpha_2^2 + \ldots + a_n - \alpha_n^2 = A$$

и обозначим через L^3 наибольшую из n величин

$$l_1,\ l_2, \ldots, l_n.$$

---

* Через $|x|$ мы будем вообще обозначать абсолютное значение числа x.

Тогда, если выражение

$$\frac{L^2}{A} n^{\frac{2}{3}}$$

стремится к нулю, когда n бесконечно возрастает, то вероятность неравенств

$$z_1 \sqrt{2A} < x_1 - \alpha_1 + x_2 - \alpha_2 + \ldots + x_n - \alpha_n < z_2 \sqrt{2A},$$

каковы бы ни были данные числа z_1 и $z_2 > z_1$, будет стремиться, при том же предположении относительно n, к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

и притом равномерно для всех значений z_1 и z_2.

Ясно, что условия этой теоремы значительно более общие, чем условия Чебышева, так как они не только не требуют, чтобы математические ожидания всех степеней переменных оставались меньше некоторого предела, но они не предполагают даже, для степени выше третьей, существование этих величин. Кроме того, дополнительное условие, введенное Марковым, которое относится к величине A и состоит в том, что $\frac{A}{n}$ не может становиться меньше некоторого положительного числа, каково бы ни было n, является только частным случаем условия, что, при n бесконечно возрастающем, $An^{-\frac{2}{3}}$ стремится к бесконечности, что должно обязательно иметь место, если

$$\lim_{n=\infty} \frac{L^2}{A} n^{\frac{2}{3}} = 0,$$

так как число L, по самой его сущности, не может стремиться к нулю.

2

Прежде чем приступать к доказательству, укажем, в чем состоит принципиальная трудность вопроса.

Ограничимся для этой цели наиболее простым случаем, когда каждая переменная имеет конечное число возможных значений, и обозначим через $f_i(x)$ вероятность, что величина x_i равна некоторому числу x.

Полагая

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+z_1\sqrt{2A}=g-h,$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+z_2\sqrt{2A}=g+h,$$

рассмотрим вероятность неравенств

$$g-h<x_1+x_2+\ldots+x_n<g+h,$$

где, для определенности, мы исключаем равенства.

Эта вероятность, которую мы обозначим через P, представляется суммой

$$\sum f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n),$$

распространенной на все совокупности возможных значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют предшествующим неравенствам.

Но, полагая

$$x_1+x_2+\ldots+x_n-g=s$$

и введя под знак суммы множитель Дирихле

$$J=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ht}{t}\cos st\,dt,$$

можно избавиться от этих неравенств.

Действительно, известно, что этот множитель J, каково бы ни было положительное число h, равен: 1, когда $|s| < h$, равен 0, когда $|s| > h$, и $\frac{1}{2}$, когда $s = \pm h$. Поэтому, распространив суммирование на *все* возможные значения переменных, получим

$$\sum f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) J = P + \frac{1}{2} p,$$

где p есть вероятность, что сумма

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

будет равна одному из чисел $g - h$, $g + h$.

Отсюда, по самому существу доказываемой теоремы, видно, что рассмотрение P может быть заменено рассмотрением суммы, стоящей в левой части, и что вопрос сводится, таким образом, к доказательству, что эта сумма стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

когда n бесконечно возрастает.

Но сумма, о которой идет речь, сводится к

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ht}{t} Q dt, \tag{1}$$

где

$$Q = \sum f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \cos st,$$

и, с другой стороны, изучение величины Q, показывает, что, в условиях нашей теоремы, имеем

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\tau \frac{\sin ht}{t} Q dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

где τ положительное число, которое, при возрастании n до бесконечности, стремится к нулю таким образом, что величина $L\tau n^{\frac{1}{3}}$ остается постоянной.

Все сводится, поэтому, к доказательству, что

$$\lim_{n=\infty} \int_{\tau}^{\infty} \frac{\sin ht}{t} Q dt = 0,$$

и именно в этом состоит главная трудность.

Мы предположили, что число возможных значений для каждой из переменных конечно. Если число их бесконечно, как это имеет место в анализе Глэшера,[1] это представит еще новое затруднение, происходящее от того, что преобразование, которое следует выполнить, чтобы получить выражение (1), может оказаться непозволительным.

Стремясь уменьшить трудности, о которых идет речь, я был вынужден прибегнуть сначала к некоторым предположениям, значительно суживающим условия теоремы. Но в дальнейшем я заметил, что эти предположения не являются необходимыми и что затруднения могут быть обойдены с помощью одного искусственного приема, состоящего в рассмотрении, одновременно с переменными x_i, вспомогательной переменной, определенной надлежащим образом.

Именно так мы и будем здесь доказывать формулированную нами теорему.

3

Переходя теперь к нашему исследованию, начнем с введения вспомогательной переменной, о которой только что была речь.

[1] Заметим, что Глэшер рассматривает случай, когда возможные значения распределены непрерывно и когда вероятности представляются в форме интегралов.

Пусть ξ — переменная, не зависящая вовсе от переменных x_i, так что вероятность, с которой она оказывается заключенной между данными пределами, не зависит от значений, принятых этими переменными.

Пусть, далее, λ — положительное число и p — вероятность неравенств

$$-2\lambda < \xi < 2\lambda. \tag{2}$$

Полагая для сокращения

$$x_1 - \alpha_1 + x_2 - \alpha_2 + \ldots + x_n - \alpha_n = S,$$

будем обозначать, как и выше, через P вероятность неравенств

$$z_1 \sqrt{2A} < S < z_2 \sqrt{2A}. \tag{3}$$

Затем, предполагая, что число λ выбрано таким образом, чтобы было

$$4\lambda < (z_2 - z_1) \sqrt{2A},$$

будем обозначать через P' вероятность неравенств

$$z_1 \sqrt{2A} + 2\lambda < S + \xi < z_2 \sqrt{2A} - 2\lambda \tag{4}$$

и через P'' вероятность неравенств

$$z_1 \sqrt{2A} - 2\lambda < S + \xi < z_2 \sqrt{2A} + 2\lambda. \tag{5}$$

Положив это, покажем, что для интересующей нас вероятности P можно указать два предела, зависящих от величин P', P'' и p.

Для этой цели заметим, что предположение о справедливости совокупных неравенств (2) и (3) влечет за собой справедливость неравенств (5) и что, таким же образом, неравенства (2) и (4) влекут за собой неравенства (3).

Следовательно, мы должны заключить, что величина P'' не может быть меньше, чем вероятность одновременного осуществления неравенств (2) и (3), и что, в то же время, P не может быть меньше, чем вероятность одновременного осуществления неравенств (2) и (4).

Но, так как события, представляемые, одно — неравенствами (2), другое — неравенствами (3), являются независимыми, то вероятность того, что эти две системы неравенств осуществляются одновременно, равна произведению pP их вероятностей. Что касается вероятности одновременного осуществления двух систем неравенств (2) и (4), то, хотя она и не выражается точно через вероятности p и P' этих систем, так как соответствующие события не являются независимыми, но все-таки можно указать для нее нижнюю границу, а именно

$$P' + p - 1.$$ [1]

Поэтому мы имеем следующие два неравенства

$$P'' > Pp, \quad P > P' + p - 1,$$

из которых первое можно заменить следующим:

$$P'' > P + p - 1,$$

которое является его следствием.

Таким образом, получим

$$P' - 1 + p < P < P'' + 1 - p,$$

что дает два предела, которые мы хотели указать.

---

[1] Вообще, если p, q суть вероятности двух каких-либо событий (рассматриваемых отдельно) и r вероятность их совмещения, то

$$p + q - r \leqslant 1,$$

так как левая часть представляет вероятность того, что по крайней мере одно из двух событий произойдет.

Обозначая через ϑ величину, заключенную между -1 и $+1$, мы можем представить этот результат в форме

$$P=\frac{1}{2}(P'+P'')+\frac{1}{2}\vartheta(P''-P')+\vartheta(1-p). \tag{6}$$

Эта формула послужит для нас точкой отправления.

Чтобы можно было извлечь из нее пользу, следует сделать надлежащие предположения о вероятности неравенств вида:

$$\xi_1<\xi<\xi_2,$$

где ξ_1 и ξ_2 суть какие-либо данные числа, и гипотеза, на которой мы остановимся, состоит в том, что эта вероятность дается известной формулой

$$\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi}}\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa^2}}\,dx,$$

где $\varkappa$ означает положительное число, которым мы распорядимся позднее.

Вследствие этого, будем иметь

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\lambda}{\varkappa}} e^{-z^2}\,dz. \tag{7}$$

Формула (6) зависит от неизвестной величины ϑ. Но она содержит два произвольных числа $\varkappa$ и λ, которыми можно распорядиться, как это будет видно, таким образом, чтобы члены, зависящие от ϑ, стремились к нулю, когда n бесконечно возрастает, что мы и будем делать при использовании этой формулы в дальнейшем.

Заметим, что, при принятой гипотезе относительно ξ, вероятность всякого равенства вида

$$\xi=\text{данной величине}$$

или

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+\xi=\text{данной величине}$$

будет, очевидно, равна нулю. Следовательно, в неравенства (2), (4) и (5) можно включить и знаки равенств, без изменения значений соответствующих вероятностей.

Нельзя того же сказать относительно неравенств (3). Но легко видеть, что, если присоединить там знаки равенства, формула (6) не утратит точности.

Поэтому в формуле (6) можно понимать под P, по желанию, вероятность одной из четырех следующих систем неравенств:

$$z_1\sqrt{2\text{A}} < S < z_2\sqrt{2\text{A}},$$
$$z_1\sqrt{2\text{A}} < S \leqslant z_2\sqrt{2\text{A}},$$
$$z_1\sqrt{2\text{A}} \leqslant S < z_2\sqrt{2\text{A}},$$
$$z_1\sqrt{2\text{A}} \leqslant S \leqslant z_2\sqrt{2\text{A}}.$$

4

На основании формулы (6), мы должны рассмотреть величины P' и P'', из которых каждая является вероятностью неравенств вида

$$g - h < x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \xi < g + h. \tag{8}$$

Поэтому мы будем рассматривать, вообще, вероятность неравенств (8), где h — некоторое положительное число, а g — какое угодно число.

Чтобы вычислить эту вероятность, которую мы обозначим через Π, мы должны быть в состоянии вычислить, для каждой величины x_i, вероятность, что она заключена между данными какими-либо пределами.

Для этой цели можно было бы ввести, например, функции $\Phi_i(x)$, которые выражают вероятности неравенств вида

$$x_i < x,$$

ибо тогда величина $\Phi_i(v)-\Phi_i(u)$, для $v>u$, будет представлять собой вероятность неравенств

$$u \leqslant x_i < v.$$

Используя эти функции, можно было бы получить для Π пределы, верхний и нижний, сколь угодно близкие друг к другу, и именно с этими пределами следовало бы действовать, если желать приступить непосредственно к самому общему случаю, когда ничего не предполагается относительно возможных значений переменных.

На этом пути не представилось бы никаких трудностей; но неизбежно пришлось бы останавливаться на некоторых побочных исследованиях, что усложнило бы анализ.

В виду этого, мы предпочитаем поступать иначе и рассмотрим сначала частный случай п. 2, от которого перейдем в дальнейшем к общему случаю как к предельному.

Такой способ соответствует самому духу исчисления вероятностей, и, хотя он значительно проще, он является вполне общим.

Таким образом, мы будем считать, что для каждой переменной x_i имеется только конечное число возможных значений, и мы увидим, что окончательный результат наших вычислений сам собою распространится на общий случай.

Приняв это, обозначим, как в п. 2, через $f_i(x)$ вероятность равенства

$$x_i = x,$$

где x принадлежит ко множеству значений x_i, и положим для сокращения,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - g = s.$$

Тогда неравенства (8) запишутся так

$$-h-s < \xi < h-s,$$

и мы получим для П выражение

$$П = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi}} \sum f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \int_{-h-s}^{h-s} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa^2}} dx,$$

или

$$П = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \int_{-\frac{h+s}{2\varkappa}}^{\frac{h-s}{2\varkappa}} e^{-x^2} dx,$$

где сумма распространена на все возможные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теперь, если мы хотим использовать метод п. 2, мы должны ввести под знак интеграла множитель

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ht}{t} \cos(2\varkappa x + s)\, t dt,$$

который равен 1, при

$$-\frac{h+s}{2\varkappa} < x < \frac{h-s}{2\varkappa},$$

и равен 0, если

$$x < -\frac{h+s}{2\varkappa} \quad \text{или} \quad x > \frac{h-s}{2\varkappa}.$$

Но в данном случае этот путь был бы бесполезным, так как это послужило бы только для установления равенства

$$\int_{-\frac{h+s}{2\varkappa}}^{\frac{h-s}{2\varkappa}} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin ht}{t} \cos st e^{-\varkappa^2 t^2} dt,$$

которое непосредственно выводится из известной формулы

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2at}{t} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \int_0^a e^{-x^2} dx.$$

Мы можем, следовательно, тотчас писать

$$\Pi = \frac{2}{\pi} \sum f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \int_0^\infty \frac{\sin ht}{t} \cos st e^{-x^2 t^2} dt,$$

что приводится к

$$\Pi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ht}{t} Q e^{-x^2 t^2} dt,$$

если положить, как в п. 2,

$$Q = \sum f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \cos st.$$

Но величина Q является действительной частью выражения

$$\sum f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) e^{st\sqrt{-1}},$$

которое может быть представлено в виде произведения

$$X_1 X_2 \ldots X_n e^{-gt\sqrt{-1}},$$

где

$$X_i = \sum f_i(x_i) e^{x_i t\sqrt{-1}}, \tag{9}$$

и сумма распространена на все возможные значения переменной x_i.

Далее, обозначая модуль и аргумент X_i соответственно через ρ_i и σ_i, так что

$$\left.\begin{aligned} \rho_i \cos \sigma_i &= \sum f_i(x_i) \cos x_i t, \\ \rho_i \sin \sigma_i &= \sum f_i(x_i) \sin x_i t, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

затем, полагая,

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n}{n}=\sigma,$$

будем иметь

$$Q=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos(n\sigma-gt).$$

Таким образом, мы получаем

$$\Pi=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin ht}{t}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos(n\sigma-gt)e^{-x^2t^2}dt,$$

и это есть то выражение, которое мы будем изучать в дальнейшем.

5

Пусть τ некоторое положительное число, которое более точно мы определим позднее.

Положим

$$\Pi_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\tau\frac{\sin ht}{t}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos(n\sigma-gt)e^{-x^2t^2}dt$$

и, представляя Π в виде

$$\Pi=\Pi_1+R_1,$$

начнем с нахождения верхней границы для абсолютного значения

$$R_1=\frac{2}{\pi}\int_\tau^\infty\frac{\sin ht}{t}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos(n\sigma-gt)e^{-x^2t^2}dt.$$

Для этой цели заметим, что формула (9) дает

$$\rho_i\leqslant\sum f_i(x_i),$$

где правая часть, представляющая вероятность того, что переменная x_i принимает какое-либо из своих возможных значений, равна единице.

Следовательно, всегда мы имеем

$$\rho_i \leqslant 1.$$

Поэтому оказывается

$$|R_1| < \frac{2}{\pi\tau}\int_\tau^\infty e^{-\varkappa^2 t^2} dt,$$

и, в силу неравенства

$$\int_z^\infty e^{-x^2} dx < \frac{1}{2z} e^{-z^2},$$

имеющего место для всех положительных чисел z, получаем

$$|R_1| < \frac{1}{\pi\varkappa^2\tau^2} e^{-\varkappa^2\tau^2}, \tag{11}$$

что и дает искомую границу.

Это неравенство показывает, что, связывая числа $\varkappa$, τ и n надлежащими соотношениями, можно добиться того, чтобы R_1 стремилось к нулю, когда n возрастает до бесконечности.

В этом и состоит роль числа $\varkappa$, и именно таким образом мы и преодолеваем затруднение, указанное в п. 2.

6

Мы будем рассматривать теперь выражение Π_1. Но сначала мы должны заняться подинтегральной функцией, которую надо будет представить в подходящем виде.

Начнем с вычисления произведения

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n.$$

Обращаясь к формуле (9), получаем

$$\rho_i^2 = \sum f_i(x_i)\, e^{x_i t\sqrt{-1}} \sum f_i(x_i)\, e^{-x_i t\sqrt{-1}},$$

что можно представить в форме

$$\rho_i^2 = \sum \sum f_i(x) f_i(y) \cos(x-y)t,$$

предполагая, что суммирования, относящиеся к x и y, распространены на одно и то же множество значений, являющееся множеством возможных значений x_i.

Но имеем

$$\cos(x-y)t = 1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 t^2 + \frac{1}{6}(x-y)^3 t^3 \sin\theta(x-y)t,$$

где θ — некоторая величина, заключенная между 0 и 1.

Поэтому, полагая

$$\omega_i = \frac{1}{6} \sum \sum f_i(x) f_i(y) (x-y)^3 \sin\theta(x-y)t$$

и, принимая во внимание, что

$$\sum f_i(x_i) = 1, \quad \sum f_i(x_i)\, x_i = \alpha_i, \quad \sum f_i(x_i)\, x_i^2 = a_i,$$

приходим к такому выражению

$$\rho_i^2 = 1 - (a_i - \alpha_i^2)\, t^2 + \omega_i t^3.$$

Теперь, полагая для сокращения

$$a_i - \alpha_i^2 - \omega_i t = u_i,$$

так что мы будем иметь

$$\rho_i^2 = 1 - u_i t^2,$$

воспользуемся формулой

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2(1-\theta' x)},$$

где θ' — некоторое число, заключенное между 0 и 1, если только $x<1$.

Таким образом, мы получим

$$\log \rho_i^2 = -u_i t^2 - \frac{u_i^2 t^4}{2(1-\theta' u_i t^2)},$$

что, если положить

$$\omega_i - \frac{u_i^2 t}{2(1-\theta' u_i t^2)} = w_i,$$

принимает вид

$$\log \rho_i^2 = -(a_i - \alpha_i^2) t^2 + w_i t^3,$$

и отсюда вытекает

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n = e^{-\frac{1}{2} t^2 (A - nwt)},$$

где

$$w = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}{n}.$$

Мы должны теперь указать верхнюю границу для $|w|$, что мы будем делать при предположении, что t не выходит из интервала $(0, \tau)$ и что τ достаточно мало, чтобы было

$$L\tau \leqslant k,$$

где k — положительная дробь, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{k}{1-k^2} < \frac{8}{3}.$$

Прежде всего укажем верхние границы для a_i и ω_i, полагая, что число i не превосходит n.

Принимая во внимание равенство

$$\sum f_i(x_i) = 1,$$

легко установить, что

$$\left(\sum f_i(x_i)\, x_i^2\right)^3 < \left(\sum f_i(x_i)\, |x_i|^3\right)^2.$$

Но это неравенство записывается так:

$$a_i^3 < l_i^2,$$

и для рассматриваемых значений i имеем

$$l_i \leqslant L^3.$$

Поэтому получаем

$$a_i < L^2.$$

Что касается ω_i, то формула, которая определяет эту величину, дает

$$\omega_i < \frac{1}{6} \sum \sum f_i(x) f_i(y) (|x| + |y|)^3,$$

что приводит к

$$\omega_i < \frac{1}{3} \sum f_i(x_i) |x_i|^3 + \sum f_i(x_i) |x_i| \sum f_i(x_i) x_i^2,$$

и, благодаря легко устанавливаемому неравенству

$$\sum f_i(x_i) |x_i| \sum f_i(x_i) x_i^2 < \sum f_i(x_i) |x_i|^3,$$

это позволяет заключить, что

$$\omega_i < \frac{4}{3} l_i < \frac{4}{3} L^3.$$

Заметим, кроме того, что для $t > 0$, всегда $\omega_i > 0$. Действительно, неравенство

$$\cos(x - y) t > 1 - \frac{1}{2} (x - y)^2 t^2$$

дает

$$\rho_i^2 > 1 - (a_i - a_i^2) t^2$$

или

$$\omega_i t^3 > 0.$$

Установив это и обратившись к выражению u_i, получим

$$u_i < a_i < L^2,$$

откуда вытекает

$$u_i t^2 < k^2, \qquad u_i^2 t < kL^3,$$

причем u_i всегда положительно, так как $\rho_i < 1$.

Вследствие этого, замечая, что

$$-\frac{u_i^2 t}{2(1-u_i t^2)} < w_i < \omega_i,$$

мы приходим к неравенству

$$|w_i| < \frac{4}{3} L^3.$$

Поэтому, получаем

$$|w\ | < \frac{4}{3} L^3.$$

Это неравенство имеет место в интервале $(0, \tau)$, неравенство же

$$w < \frac{4}{3} L^3$$

будет, очевидно, верным каково бы ни было положительное t.

7

Переходим к оценке

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n}{n}.$$

Обращаясь к формулам (10), замечаем, что функции σ_i определяются этими формулами только с точностью до кратного 2π. Мы их определим вполне, по крайней мере для достаточно малых значений t, предположив, что они обращаются в нуль при $t=0$, что находится в согласии с формулами, о которых идет речь.

Положив это, воспользуемся затем формулами

$$\cos x_i t = 1 - \frac{1}{2} x_i^2 t^2 \cos \theta x_i t,$$

$$\sin x_i t = x_i t - \frac{1}{6} x_i^3 t^3 \cos \theta' x_i t,$$

где θ и θ' обозначают величины, заключенные между 0 и 1.

В силу этих формул, полагая

$$\xi_i = \frac{1}{2} \sum f_i(x_i) x_i^2 \cos \theta x_i t,$$

$$\eta_i = \frac{1}{6} \sum f_i(x_i) x_i^3 \cos \theta' x_i t,$$

получим

$$\rho_i \cos \sigma_i = 1 - \xi_i t^2,$$

$$\rho_i \sin \sigma_i = \alpha_i t - \eta_i t^3.$$

Мы будем иметь поэтому

$$\operatorname{tang} \sigma_i = \frac{\alpha_i t - \eta_i t^3}{1 - \xi_i t^2} = \alpha_i t - \zeta_i t^3,$$

где

$$\zeta_i = \frac{\eta_i - \alpha_i \xi_i}{1 - \xi_i t^2}.$$

Но, если понимать под $\operatorname{arctang} x$ его значение, обращающееся в нуль при $x = 0$, то будет

$$\operatorname{arctang} x = x - \frac{1}{3} \theta'' x^3,$$

где θ'' заключено между 0 и 1.

Поэтому находим

$$\sigma_i = \alpha_i t - v_i t^3,$$

где v_i дается формулой

$$v_i = \zeta_i + \frac{\theta''}{3} \left(\frac{\alpha_i - \eta_i t^2}{1 - \xi_i t^2} \right)^3.$$

Поэтому, полагая

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} = \alpha, \quad \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n} = v,$$

получим

$$\sigma = \alpha t - vt^3,$$

и остается указать верхнюю границу для $|v|$.

Для этой цели, считая выполненными предположения, указанные в предшествующем параграфе, заметим, что

$$|\xi_i| < \frac{1}{2} \sum f_i(x_i) x_i^2 < \frac{1}{2} L^2,$$

$$|\eta_i| < \frac{1}{6} \sum f_i(x_i) |x_i|^3 < \frac{1}{6} L^3,$$

$$|\alpha_i| < \sqrt{\alpha_i} < L.$$

Отсюда вытекает

$$|\eta_i - \alpha_i \xi_i| < \frac{2}{3} L^3,$$

$$1 - \xi_i t^2 > 1 - \frac{1}{2} L^2 \tau^2 > 1 - \frac{1}{2} k^2,$$

и, следовательно,

$$|\zeta_i| < \frac{2}{3} \frac{L^3}{1 - \frac{1}{2} k^2}.$$

С другой стороны, формула

$$\alpha_i - \eta_i t^2 = \sum f_i(x_i) \frac{\sin x_i t}{t}$$

дает

$$|\alpha_i - \eta_i t^2| < \sum f_i(x_i) |x_i| < L,$$

так как

$$\left(\sum f_i(x_i) |x_i|\right)^2 < \sum f_i(x_i) x_i^2.$$

Вследствие этого получим

$$|v_i| < \frac{2}{3} \frac{L^3}{1 - \frac{1}{2} k^2} + \frac{1}{3} \frac{L^3}{\left(1 - \frac{1}{2} k^2\right)^3},$$

или $|v_i| < V$, где

$$V = \frac{\frac{2}{3} k^2 + \frac{1}{6} k^4}{\left(1 - \frac{1}{2} k^2\right)^3} L^3. \qquad (12)$$

Поэтому будем иметь также

$$|v| < V.$$

8

Резюмируя полученные результаты, имеем

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n = e^{-\frac{1}{2} t^2 (A - mwt)}, \quad \sigma = \alpha t - vt^3,$$

причем в интервале $(0, \tau)$ соблюдаются неравенства

$$|w| < \frac{4}{3} L^3, \quad |v| < V.$$

Установив это, обратимся к выражению Π_1, и, положив

$$\Pi_1 = \Pi_2 + R_2,$$

где Π_2 дается формулой

$$\Pi_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ht}{t} \cos(n\alpha - g) t e^{-\frac{1}{2} At^2} dt,$$

будем искать верхнюю границу для $|R_2|$.

Замечая, что R_2 можно представить в виде

$$R_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau \frac{\sin ht}{t} \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n \cos(n\sigma - gt)(e^{-x^2 t^2} - 1)\, dt +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\tau \frac{\sin ht}{t} e^{-\frac{1}{2} At^2} (e^{\frac{1}{2} mwt^3} - 1) \cos(n\sigma - gt)\, dt +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\tau \frac{\sin ht}{t} e^{-\frac{1}{2} At^2} [\cos(n\sigma - gt) - \cos(n\alpha - g) t]\, dt -$$
$$- \frac{2}{\pi} \int_\tau^\infty \frac{\sin ht}{t} e^{-\frac{1}{2} At^2} \cos(n\alpha - g) t\, dt,$$

мы получим эту границу, вычислив верхнюю границу для абсолютных значений выписанных четырех интегралов.

Для этой цели, имея в виду первые три интеграла, можем воспользоваться неравенствами

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n < e^{-\frac{1}{2} nt^2 \left(\frac{A}{n} - \frac{4}{3} L^3 \tau\right)},$$

$$\left| e^{\frac{1}{2} wnt^3} - 1 \right| < \frac{2}{3} L^3 nt^3 e^{\frac{2}{3} L^3 n\tau^3},$$

$$|\cos(n\sigma - gt) - \cos(n\alpha - g)t| < nVt^3.$$

Благодаря этому, полагая

$$\frac{A}{n} - \frac{4}{3} L^3 \tau = q \frac{A}{n}$$

и замечая, что

$$1 - e^{-\varkappa^2 t^2} < \varkappa^2 t^2,$$

будем иметь

$$|R_2| < \frac{n}{\pi} \left(2V + \frac{4}{3} L^3 e^{\frac{2}{3} L^3 n\tau^3}\right) \int_0^\tau t^2 e^{-\frac{1}{2} At^2} dt +$$

$$+ \frac{2\varkappa^2}{\pi} \int_0^\tau te^{-\frac{1}{2} qAt^2} dt + \frac{2}{\pi\tau} \int_\tau^\infty e^{-\frac{1}{2} At^2} dt.$$

Но

$$\int_\tau^\infty e^{-\frac{1}{2} At^2} dt < \frac{1}{A\tau} e^{-\frac{1}{2} A\tau^2},$$

$$\int_0^\tau t^2 e^{-\frac{1}{2} At^2} dt < \int_0^\infty t^2 e^{-\frac{1}{2} At^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} A^{\frac{3}{2}}},$$

и, предполагая τ достаточно малым, чтобы было

$$q = 1 - \frac{4}{3} \frac{L^3 n\tau}{A} > 0,$$

будем иметь

$$\int_0^\tau te^{-\frac{1}{2}qAt^2}dt<\int_0^\infty te^{-\frac{1}{2}qAt^2}dt=\frac{1}{qA}.$$

Поэтому, полагая

$$2V+\frac{4}{3}L^3e^{\frac{2}{3}L^3n\tau^3}=KL^3,$$

получим

$$|R_2|<\frac{KL^3n}{\sqrt{2\pi}A^{\frac{3}{2}}}+\frac{2\varkappa^2}{\pi qA}+\frac{2}{\pi A\tau^2}e^{-\frac{1}{2}A\tau^2}. \qquad (13)$$

Остается рассмотреть выражение, обозначенное нами через Π_2.

Заменяя там t через

$$\frac{2t}{\sqrt{2A}}$$

и полагая

$$\zeta_1=\frac{g-n\alpha-h}{\sqrt{2A}},\quad \zeta_2=\frac{g-n\alpha+h}{\sqrt{2A}},$$

можем представить это выражение в виде

$$\Pi_2=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin 2\zeta_2t-\sin 2\zeta_1t}{t}e^{-t^2}dt.$$

Поэтому, в силу формулы

$$\int_0^\infty\frac{\sin 2at}{t}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\int_0^a e^{-z^2}dz,$$

будет

$$\Pi_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}e^{-z^2}dz.$$

9

Возвратимся теперь к полученным результатам.

Имеем

$$\Pi = \Pi_2 + R_1 + R_2$$

вместе с неравенствами (11) и (13), которые дают верхние границы для абсолютных значений величин R_1 и R_2.

Вследствие этого, если положить

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-z^2} dz + R,$$

то будет

$$|R| < \frac{1}{\pi \varkappa^2 \tau^2} e^{-\varkappa^2 \tau^2} + \frac{K L^3 n}{\sqrt{2\pi} A^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\varkappa^2}{\pi q A} + \frac{2}{\pi A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} A \tau^2}. \quad (14)$$

Этот результат установлен с помощью предыдущих рассуждений в предположении, что число возможных значений каждой из переменных конечно. Но легко видеть, что его можно непосредственно распространить на все случаи, когда существуют математические ожидания, обозначаемые нами через α_i, a_i, l_i.

Действительно, эти величины дают все, что следует знать относительно рассматриваемого случая, чтобы быть в состоянии образовать правую часть неравенства (14), и ничто не мешает затем увеличивать число возможных значений и изменять их вероятности каким угодно образом.

Неравенство (14) остается справедливым, лишь бы только положительное число τ было выбрано с сохранением условий

$$L\tau \leqslant k, \quad \frac{A}{n} - \frac{4}{3} L^3 \tau > 0;$$

и если при изучении случая, когда множество возможных значений бесконечно, рассматривать его как предельный для вышерассмотренного случая с конечным числом возможных значений, то это неравенство сохранится и в пределе вся-

кий раз, как величины α_i, a_i, l_i ($i=1, 2, 3, \ldots$) будут стремиться к определенным пределам.

Поэтому полученный результат является вполне общим, и с настоящего момента мы можем освободиться от предположения, введенного нами в п. 4, которое было сделано единственно с целью упрощения анализа.

Установив это, мы покажем сейчас, как этот результат позволяет доказать занимающую нас теорему.

10

Вернемся к формуле (6) и, полагая

$$P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}dz+\Delta,$$

займемся отысканием верхней границы для абсолютного значения Δ.

Мы должны ввести выражения P' и P''.

Мы получим P', полагая в выражении для Π

$$g=n\alpha+\frac{z_1+z_2}{2}\sqrt{2A}, \quad h=\frac{z_2-z_1}{2}\sqrt{2A}-2\lambda.$$

Мы будем иметь, следовательно,

$$P'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} e^{-z^2}dz+R',$$

где R' получается из R при вышеуказанных предположениях относительно g и h и где

$$\zeta_1'=z_1+\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}, \quad \zeta_2'=z_2-\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}.$$

Что касается P'', то мы получим его выражение, заменив в формуле для P' число λ на $-\lambda$.

Поэтому, обозначая через R'' соответственным образом измененное значение R' и полагая

$$\zeta_1'' = z_1 - \frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}, \quad \zeta_2'' = z_2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{2A}},$$

будем иметь

$$P'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\zeta_1''}^{\zeta_2''} e^{-z^2} dz + R''.$$

В силу этих формул, если обозначить величину

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} e^{-z^2} dz + \frac{1}{2} \int\limits_{\zeta_1''}^{\zeta_2''} e^{-z^2} dz - \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

как некоторую функцию от $\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}$, через $\Omega\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}\right)$, получим

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Omega\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}\right) + \frac{1}{2}(R' + R'') + \frac{1}{2} \vartheta (P'' - P') + \vartheta (1 - p),$$

где ϑ — величина, заключенная между -1 и $+1$, и требуемая граница будет найдена, если найти верхние границы для абсолютных значений всех четырех членов правой части.

Начнем с первого члена.

Обозначая первые две производные функции $\Omega(x)$ через $\Omega'(x)$ и $\Omega''(x)$ и замечая, что

$$\Omega(0) = \Omega'(0) = 0,$$

будем иметь

$$\Omega\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}\right) = \frac{\lambda^2}{A} \Omega''\left(\frac{2\theta\lambda}{\sqrt{2A}}\right),$$

где θ заключено между 0 и 1.

Но имеем

$$\Omega''\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}\right)=\zeta_1' e^{-\zeta_1'^2}-\zeta_2' e^{-\zeta_2'^2}+\zeta_1'' e^{-\zeta_1''^2}-\zeta_2'' e^{-\zeta_2''^2},$$

где правая часть, каково бы ни было λ, не превосходит по абсолютному значению величины $\frac{4}{\sqrt{2e}}$, так как всегда

$$|x|\, e^{-x^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Поэтому

$$\left|\Omega\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{2A}}\right)\right|<\frac{4\lambda^2}{\sqrt{2e}A}.$$

Перейдем теперь к третьему члену.

Имеем

$$P''-P'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\zeta_1''}^{\zeta_1'} e^{-z^2}\,dz+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\zeta_2'}^{\zeta_2''} e^{-z^2}dz+R''-R',$$

откуда вытекает

$$P''-P'<\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\zeta_1'-\zeta_1''+\zeta_2''-\zeta_2')+|R'|+|R''|$$

или

$$P''-P'<\frac{8\lambda}{\sqrt{2\pi A}}+|R'|+|R''|.$$

Переходя, наконец, к четвертому члену, заметим, что в силу формулы (7),

$$1-p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\lambda}{x}}^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

откуда следует

$$1-p<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{\lambda}e^{-\frac{\lambda^2}{x^2}}.$$

Таким образом, находим

$$|\Delta|<\frac{4\lambda^2}{\sqrt{2\pi e A}}+\frac{4\lambda}{\sqrt{2\pi A}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{\lambda}e^{-\frac{\lambda^2}{x^2}}+|R'|+|R''|,$$

что, вследствие неравенства (14), приводится к

$$\left.\begin{aligned}|\Delta|<\frac{4\lambda}{\sqrt{2\pi A}}\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{eA}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{\lambda}e^{-\frac{\lambda^2}{x^2}}+\\+\frac{2}{\pi x^2\tau^2}e^{-x^2\tau^2}+\frac{4x^2}{\pi q A}+\frac{2KL^3 n}{\sqrt{2\pi}A^{3/2}}+\frac{4}{\pi A\tau^2}e^{-\frac{1}{2}A\tau^2}.\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

В этом неравенстве

$$q=1-\frac{4}{3}\frac{L^3 n\tau}{A},$$

а что касается K, мы положили

$$KL^3=2V+\frac{4}{3}L^3 e^{\frac{2}{3}L^3 n\tau^3},$$

что, в силу (12), дает

$$K=2\frac{1-\frac{2}{3}k^2+\frac{1}{6}k^4}{\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)^3}+\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}L^3 n\tau^3}.$$

11

Мы должны доказать, что, при заданных z_1 и z_2, будет

$$\lim_{n=\infty}\Delta=0,$$

если только

$$\lim_{n=\infty} \frac{L^2}{A} n^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Положим

$$\frac{L}{\sqrt{A}} n^{\frac{1}{3}} = \varepsilon,$$

считая, что, при n бесконечно возрастающем, ε стремится к нулю, и изучим при этом предположении выражение, стоящее в правой части неравенства (15).

Это выражение зависит от положительных чисел

$$k, \tau, \lambda, \varkappa,$$

связанных условиями

$$k^2 + \frac{3}{8} k < 1, \qquad L\tau \leqslant k,$$

$$\frac{A}{n} - \frac{4}{3} L^3 \tau > 0, \quad 4\lambda < (z_2 - z_1)\sqrt{2A},$$

и которыми, за исключением этого, мы можем распоряжаться по желанию.

Эти условия будут выполнены, по крайней мере для достаточно больших значений n, если, определив k по условию

$$k^2 + \frac{3}{8} k < 1,$$

установить между числами τ, λ, n соотношения, в силу которых величины

$$L\tau, \quad \frac{L^3 \tau n}{A}, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{A}}$$

стремятся к нулю при $n = \infty$.

Это будет достигнуто, если в том, что касается τ, положить

$$L\tau n^{\frac{1}{3}} = \mu,$$

где μ — положительное число, которое мы предположим независимым от n. Тогда будет

$$L\tau = \mu n^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{L^3 \tau n}{A} = \mu\varepsilon^2,$$

и две первые из указанных выше величин уже будут стремиться к нулю.

Положим затем

$$\frac{\lambda}{\sqrt{A}} = \eta, \quad \frac{\varkappa}{\lambda} = \zeta,$$

где η и ζ суть величины, стремящиеся к нулю при $n = \infty$.

Мы будем иметь

$$\frac{\varkappa^2}{A} = \eta^2\zeta^2, \quad \frac{L^3 n}{A^{\frac{3}{2}}} = \varepsilon^3, \quad A\tau^2 = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2},$$

и правая часть неравенства (15) приводится к

$$\frac{4\eta}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\zeta^2}} + \frac{2}{\pi\varkappa^2\tau^2} e^{-\varkappa^2\tau^2} +$$

$$+ \frac{4\eta^2\zeta^2}{\pi q} + \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^3 + \frac{4\varepsilon^2}{\pi\mu^2} e^{-\frac{\mu^2}{2\varepsilon^2}},$$

где

$$\varkappa^2\tau^2 = \mu^2 \frac{\eta^2\zeta^2}{\varepsilon^2}, \quad q = 1 - \frac{4}{3}\mu\varepsilon^2$$

и где K — число, не зависящее от n.

Отсюда видно, что интересующее нас выражение будет стремиться к нулю для $n = \infty$, если, в то же время, как τ

и ζ, величина $\frac{\varepsilon}{\eta\zeta}$ также будет стремиться к нулю, а этому требованию всегда можно удовлетворить, так как порядки бесконечно малых величин η и ζ находятся в нашем распоряжении.

Мы можем, например, положить

$$\eta=\frac{\varepsilon}{\mu}\log\frac{\beta}{\varepsilon},\quad \zeta=\left(\log\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

понимая под β положительное, независящее от n число, и притом достаточно большое, чтобы было $\varepsilon<\beta$. Тогда будет

$$\zeta e^{-\frac{1}{\zeta^2}}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(\log\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{x^2\tau^2}e^{-x^2\tau^2}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(\log\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{-1},$$

и рассматриваемое нами выражение будет иметь в качестве главного члена

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\eta=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon}{\mu}\log\frac{\beta}{\varepsilon},$$

так что оно будет порядка $\varepsilon\log\frac{\beta}{\varepsilon}$.

Итак, видим, что действительно

$$\lim_{n=\infty}\Delta=0.$$

Сверх того, так как верхняя граница для $|\Delta|$, полученная нами, оказывается независимой от z_1 и z_2, то получаем, что величина Δ стремится к нулю *равномерно* для всех значений z_1 и z_2.

Итак, наша теорема доказана.

12

Мы получили для $|\Delta|$ верхнюю границу порядка $\varepsilon\log\frac{\beta}{\varepsilon}$. Но можно для этой величины получить границу порядка

много более высокого. Однако этого, во всяком случае, нельзя было бы сделать, используя неравенство (15), которое могло бы дать только границу, отношение которой к ε бесконечно велико, и чтобы достичь цели, следовало бы заменить это неравенство другим, более точным.]

Мы сейчас сделаем это, с большей точностью оценивая верхнюю границу для абсолютного значения величины R_1, рассмотренной в п. 5.

Обозначая для сокращения функцию, стоящую под знаком интеграла, через T, так что будем иметь

$$R_1 = \frac{2}{\pi} \int_{\tau}^{\infty} T dt,$$

представим это выражение в виде

$$R_1 = \frac{2}{\pi} \int_{\tau_1}^{\infty} T dt + \frac{2}{\pi} \int_{\tau}^{\tau_1} T dt,$$

где τ_1 — некоторое число, превышающее τ, и будем оценивать отдельно верхние границы для двух интегралов правой части. Для первого мы сделаем это так, как было сделано в п. 5 для R_1, а что касается второго, то воспользуемся неравенством

$$|T| < \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{2} t^2 \left(A - \frac{4}{3} L^3 \tau_1 n\right)},$$

которое справедливо, очевидно, в интервале (τ, τ_1). Таким образом, полагая

$$1 - \frac{4}{3} \frac{L^3 n \tau_1}{A} = q_1$$

и считая τ_1 достаточно малым, чтобы было $q_1 > 0$, будем иметь

$$\left| \int_{\tau}^{\tau_1} T dt \right| < \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} q_1 A t^2} dt < \frac{1}{q_1 A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 A \tau^2}.$$

Поэтому, в качестве верхней границы $|R_1|$ мы получим

$$\frac{1}{\pi\varkappa^2\tau_1^2} e^{-\varkappa^2\tau_1^2} + \frac{2}{\pi q_1 A\tau^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 A^{-2}}$$

и, после умножения этой величины на 2, можем заменить ею член

$$\frac{2}{\pi\varkappa^2\tau^2} e^{-\varkappa^2\tau^2}$$

в неравенстве (15).

Таким образом, приходим к неравенству

$$|\Delta| < \frac{4\lambda}{\sqrt{2\pi A}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}} + \frac{2}{\pi\varkappa^2\tau_1^2} e^{-\varkappa^2\tau_1^2} + \frac{4\lambda^2}{\sqrt{2\pi e A}} +$$

$$+ \frac{4\varkappa^2}{\pi q A} + \frac{\sqrt{2} K L^3 n}{\sqrt{\pi} A^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{\pi q_1 A\tau^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 \tau^2 A} + \frac{4}{\pi A\tau^2} e^{-\frac{1}{2} A\tau^2},$$

которое может дать более точные результаты.

Итак, посмотрим, что можно из него вывести.

Относительно k и τ сохраним предположения предшествующего параграфа. Что касается числа τ_1, предположим, что $\frac{L^3\tau_1 n}{A}$ не зависит от n и, обозначая через μ_1 определенное положительное число, меньшее, чем $\frac{3}{4}$, положим

$$\frac{L^3\tau_1 n}{A} = \mu_1,$$

так что

$$q_1 = 1 - \frac{4}{3}\mu_1.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\mu}{\mu_1}\varepsilon^2,$$

и, для достаточно больших n, получим $\tau_1 > \tau$.

Поэтому, если ввести обозначения μ и ζ предшествующего параграфа, то правая часть нашего неравенства приведется к

$$\frac{4\eta}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\zeta^2}} + \frac{2}{\pi \varkappa^2 \tau_1^2} e^{-\varkappa^2 \tau_1^2} + \frac{4\eta^2}{\sqrt{2\pi e}} + \frac{4\eta^2 \zeta^2}{\pi q} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^3 + \frac{4\varepsilon^2}{\pi q_1 \mu^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}} + \frac{4\varepsilon^2}{\pi \mu^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}},$$

где

$$\varkappa^2 \tau_1^2 = \mu_1^2 \frac{\eta^2 \zeta^2}{\varepsilon^6}.$$

Следовательно, чтобы наша новая верхняя граница стремилась к нулю одновременно с ε, η и ζ, достаточно, чтобы величина

$$\frac{\varepsilon^3}{\eta \zeta}$$

стремилась к нулю; этому условию можно удовлетворить положив

$$\eta = \frac{3\varepsilon^3}{\mu_1} \log \frac{\beta}{\varepsilon}, \quad \zeta = \left(3 \log \frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда получим

$$\zeta e^{-\frac{1}{\zeta^2}} = \frac{\varepsilon^3}{\beta^3} \left(3 \log \frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\varkappa \tau_1^2} e^{-\varkappa^2 \tau_1^2} = \frac{\varepsilon^3}{3\beta^3} \left(\log \frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{-1},$$

и верхняя граница будет порядка $\varepsilon^3 \log \frac{\beta}{\varepsilon}$.

Этот результат должен быть дополнен замечанием, что порядок ε никогда не может превысить порядка $n^{-\frac{1}{6}}$ Это видно из неравенства

$$\varepsilon n^{\frac{1}{6}} > 1,$$

которое следует из того, что $A < nL^2$.

В наиболее важном случае, когда, как бы велико ни было n, число L не может превзойти некоторого предела, а величина $\frac{A}{n}$ не может стать меньше некоторого определенного положительного числа, ε имеет точно порядок $n^{-\frac{1}{6}}$. Поэтому, в этом случае полученная нами верхняя граница будет порядка

$$\frac{\log n}{\sqrt{n}}.$$

Прибавим, что наше неравенство не может дать границы более высокого порядка, каковы бы ни были предположения относительно чисел k, τ_1, τ, $\varkappa$ и λ.

В заключение заметим, что сделанные нами предположения не являются наиболее выгодными, и для получения наилучшей верхней границы следовало бы разрешить некоторую минимальную задачу. Но мы не останавливаемся на этом, так как эта граница была бы все-таки достаточно грубой, чтобы можно было надеяться вывести из нее результаты, удовлетворительные с точки зрения численных расчетов.

НОВАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЕ ВЕРОЯТНОСТИ



1

Пусть

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

образуют неограниченную последовательность независимых переменных, принимающих случайные значения, принадлежащие к заданным множествам вещественных чисел.

Пусть далее

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots$$

суть математические ожидания этих переменных, и

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

суть математические ожидания величин

$$(x_1 - \alpha_1)^2,\ (x_2 - \alpha_2)^2,\ (x_3 - \alpha_3)^2, \ldots$$

Наконец, пусть z_1 и z_2 — два каких-либо данных числа, из которых второе предполагается большим.

В мемуаре, который я опубликовал в прошлом году в «Известиях Академии Наук» (т. XIII), я показал, что предельное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\, dz$$

вероятности неравенств

$$z_1 < \frac{x_1 - \alpha_1 + x_2 - \alpha_2 + \ldots + x_n - \alpha_n}{\sqrt{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}} < z_2$$

для бесконечно возрастающего n является справедливым при весьма широких условиях. Кроме того, в «Comptes rendus» (21 января 1901) я отметил потом возможность некоторых дальнейших обобщений.

Но в этих обобщениях можно итти еще дальше, и теперь я представляю на ту же тему новый мемуар, где излагаются результаты, полученные мною в последнее время.

Эти результаты заключаются в теореме, указанной в следующем параграфе.

Как будет видно, эта теорема обладает большой общностью. Но, хотя она значительно более обща, чем теорема, которую я установил в предыдущем мемуаре, метод, который там использован, достаточен для ее доказательства.

Для этой цели следует только видоизменить надлежащим образом некоторые оценки сверху и опереться на одно предложение, частные случаи которого были уже указаны в предыдущем мемуаре.

Это предложение, играющее в дальнейшем роль леммы, состоит в следующем:

Пусть

$$x', \ x'', \ x''', \ldots$$

последовательность положительных чисел и $f(x)$ — *какая-либо функция, значения которой*

$$f(x'), \ f(x''), \ f(x''') \ldots$$

все положительны. Полагая вообще

$$F(x') + F(x'') + F(x''') + \ldots = \sum F(x)$$

и обозначая через l, m, n *какие-либо числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$l > m > n \geqslant 0,$$

будем иметь

$$\left(\sum f(x)\, x^m\right)^{l-n} < \left(\sum f(x)\, x^n\right)^{l-m} \left(\sum f(x)\, x^l\right)^{m-n}.$$

Это очень легко доказать.

Рассмотрим сначала случай, когда l, m, n — целые. В этом случае выражение

$$\left(\sum f(x)\,x^n\right)^{l-m}\left(\sum f(x)\,x^l\right)^{m-n}-\left(\sum f(x)\,x^m\right)^{l-n}$$

представляется в виде кратной суммы, и, чтобы установить что оно всегда положительно, следует только выполнить небольшие очевидные преобразования и воспользоваться затем известным предложением, что для положительных величин среднее геометрическое никогда не превосходит среднего арифметического.

Установив это, распространяем лемму на случай, когда l, m, n являются какими угодно рациональными числами, сводя этот случай к предыдущему, а затем уже легко распространить ее на общий случай, когда l, m, n являются произвольными числами.

Более часто мы будем в дальнейшем пользоваться следующим частным случаем леммы:

Если

$$\sum f(x)=1,$$

то

$$\left(\sum f(x)\,x^m\right)^l<\left(\sum f(x)\,x^l\right)^m,$$

каждый раз, как положительное число m меньше l.

2

С помощью обозначений, введенных выше, теорема, которую мы докажем, может быть формулирована следующим образом:

Если через δ обозначить положительное число и через d_i — математическое ожидание величины

$$|x_i-\alpha_i|^{2+\delta},$$

то, всякий раз, когда существует такое значение δ, *при котором отношение*

$$\frac{(d_1+d_2+\ldots+d_n)^2}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{2+\delta}}$$

стремится к нулю, когда n *возрастает беспредельно, вероятность неравенств*

$$z_1<\frac{x_1-\alpha_1+x_2-\alpha_2+\ldots+x_n-\alpha_n}{\sqrt{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}}<z_2$$

стремится, для $n=\infty$, *к пределу*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z_1}^{z_2}e^{-z^2}dz,$$

равномерно для всех значений z_1 *и* $z_2>z_1$.

Сравним эту теорему с той, которую мы опубликовали в «Comptes rendus» 21 января 1901 г.

Условие этой последней теоремы выражается равенством

$$\lim_{n=\infty}\frac{(nL^{2+\delta})^2}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{2+\delta}}=0,$$

где $L^{2+\delta}$ обозначает наибольшую из величин

$$d_1', d_2', \ldots, d_n',$$

а d_i' — математическое ожидание $|x_i|^{2+\delta}$. Что касается δ, то на это положительное число было наложено ограничение, что оно не превосходит 1.

Таким образом, видно, что наше новое условие является значительно более общим, и не только потому, что число δ не подчинено более ограничению $\delta\leqslant 1$, и что вместо наибольшей среди некоторых величин, именно

$$d_1, d_2, \ldots, d_n,$$

рассматривается их среднее арифметическое, но еще и потому, что этими величинами являются d_i; ибо легко видеть, что, в своей новой форме, это условие обнимает большее число случаев, чем оно обнимало бы, если бы содержало d_i' вместо d_i.

Действительно, неравенство

$$|x_i - \alpha_i|^{2+\delta} < 2^{1+\delta}\{|x_i|^{2+\delta} + |\alpha_i|^{2+\delta}\}$$

дает

$$d_i < 2^{1+\delta}\{d_i' + |\alpha_i|^{2+\delta}\},$$

и, так как, в силу леммы предшествующего параграфа (частный случай), имеет место

$$|\alpha_i|^{2+\delta} < d_i',$$

то из указанного следует

$$d_i < 2^{2+\delta} d_i'.$$

Отсюда видно, что условие

$$\lim_{n=\infty} \frac{(d_1' + d_2' + \ldots + d_n')^2}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{2+\delta}} = 0$$

влечет за собой

$$\lim_{n=\infty} \frac{(d_1 + d_2 + \ldots + d_n)^2}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{2+\delta}} = 0,$$

тогда как обратное заключение, вообще, не является справедливым.

3

Чтобы полнее разъяснить сущность нашей теоремы, мы сделаем два замечания. Во-первых, мы отметим, что эта теорема не требует, чтобы величины d_i существовали, каково бы ни было δ: достаточно, чтобы они существовали только для достаточно малых значений δ, и чтобы среди этих значений находились такие, при которых указанное в формулировке теоремы условие было выполнено.

Во-вторых, важно заметить, что условие этой теоремы таково, что если оно выполняется для какого-либо данного значения δ, то оно будет выполняться также и для всех меньших значений.

Чтобы доказать это, заметим, что, если величины d_i существуют для данного значения δ, они существуют также и для всякого меньшего значения.[1]

Пусть теперь β — положительное число, меньшее δ, и b_i — математическое ожидание величины

$$|x_i - \alpha_i|^{2+\beta}.$$

В силу нашей леммы, будет

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^\delta < (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{\delta-\beta} (d_1 + d_2 + \ldots + d_n)^\beta,$$

откуда вытекает

$$\left(\frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{2+\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}} < \left(\frac{(d_1 + d_2 + \ldots + d_n)^2}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{2+\delta}}\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

что и доказывает правильность нашего утверждения.

Таким образом, хотя теорема не налагает никаких ограничений на число δ, кроме того, что оно положительно, в доказательстве можно ограничиться значениями δ, которые не превосходят некоторого предела, и этот предел может быть выбран произвольным образом.

Установив это, приступим к доказательству.

4

Полагая для сокращения

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A,$$

---

[1] Можно с полной общностью доказать, что существование математического ожидания x^k, где x — положительная переменная и k — какое-либо данное положительное число, влечет за собой существование математического ожидания всех положительных степеней x, меньших k.

обозначим через P вероятность неравенств

$$z_1\sqrt{2A} < x_1 - \alpha_1 + x_2 - \alpha_2 + \ldots + x_n - \alpha_n < z_2\sqrt{2A}$$

и положим

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\, dz + \Delta.$$

Мы должны исследовать верхний предел для абсолютного значения Δ.

При этом исследовании, следуя методу нашего предыдущего мемуара, мы будем рассматривать общий случай как некоторый предельный случай другого, когда число возможных значений для каждой из переменных x_i ограничено.

Будем считать, что имеет место этот частный случай, и обозначим через $f_i(x)$ вероятность равенства $x_i = x$, так что будет

$$\left.\begin{aligned} &\sum f_i(x_i) = 1, \quad && \sum f_i(x_i)(x_i - \alpha_i)^2 = a_i, \\ &\sum f_i(x_i)\, x_i = \alpha_i, \quad && \sum f_i(x_i)\, |x_i - \alpha_i|^{2+\delta} = d_i, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где суммы распространены на все возможные значения x_i.

Теперь, обозначая через ρ_i, σ_i функции от t, определенные формулами

$$\left.\begin{aligned} \rho_i \cos\sigma_i &= \sum f_i(x_i) \cos(x_i - \alpha_i)\, t, \\ \rho_i \sin\sigma_i &= \sum f_i(x_i) \sin(x_i - \alpha_i)\, t, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и через $\varkappa$, g, h — вещественные постоянные, положим

$$\Pi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ht}{t}\, \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n \cos(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n - gt)\, e^{-\varkappa^2 t^2} dt$$

и допустим, что при ζ_1 и ζ_2, заданных формулами

$$\zeta_1 = \frac{g-h}{\sqrt{2A}}, \quad \zeta_2 = \frac{g+h}{\sqrt{2A}},$$

для абсолютного значения величины

$$\Pi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-z^2} dz = R$$

получена верхняя граница L, *не зависящая от* g *и* h.

Тогда, вследствие того, что было показано в нашем предшествующем мемуаре (п. 10),[1] предполагая $\varkappa$ и λ положительными числами, будем иметь

$$|\Delta| < \frac{4\lambda}{\sqrt{2\pi A}} + \frac{4\lambda^2}{\sqrt{2\pi e A}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}} + 2L, \quad (3)$$

каковы бы ни были $\varkappa$ и λ, если только

$$4\lambda \leqslant (z_2 - z_1)\sqrt{2A}.$$

Впрочем, изменяя немного второй член неравенства (3), можно освободиться от последнего ограничения.

Действительно, полагая для сокращения

$$\frac{4\lambda}{\sqrt{2A}} = \eta$$

и обозначая через ω второй член в (3), мы имеем

$$|\Delta| < \omega$$

для всех значений z_1 и z_2, которые удовлетворяют неравенству

$$z_2 - z_1 \geqslant \eta.$$

[1] Как видно, мы изменили обозначения: величины, обозначенные в предыдущем мемуаре через σ_i, g, задаются, при новых обозначениях, формулами

$$\sigma_i + \alpha_i t, \quad g + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Но, если имеет место

$$z_2 - z_1 < \eta,$$

то вероятность P будет меньше вероятности неравенств

$$z_1 \sqrt{2A} < x_1 - \alpha_1 + x_2 - \alpha_2 + \ldots + x_n - \alpha_n < (z_1 + \eta) \sqrt{2A}$$

а эта последняя вероятность меньше величины

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_1+\eta} e^{-z^2}\, dz + \omega < \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} + \omega .$$

Итак, в этом случае, мы будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\, dz + \Delta < \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} + \omega,$$

что дает

$$\Delta < \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} + \omega,$$

и, так как

$$\Delta > -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz > -\frac{\eta}{\sqrt{\pi}},$$

то из этого следует

$$|\Delta| < \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} + \omega.$$

Отсюда видно, что неравенство

$$|\Delta| < \frac{8\lambda}{\sqrt{2\pi A}} + \frac{4\lambda^2}{\sqrt{2\pi e}\, A} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}} + 2L \tag{4}$$

будет иметь место, каковы бы ни были положительные числа $\varkappa$ и λ и каковы бы ни были числа z_1 и $z_2 > z_1$.

Сведя, таким образом, задачу к оценке L, обратимся теперь к выражению R.

5

Принимая во внимание значения ζ_1 и ζ_2, легко убедиться в том, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-z^2}\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ht}{t}\cos gt\, e^{-\frac{1}{2}At^2}\,dt.$$

Следовательно, полагая

$$T = \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n-gt)\,e^{-x^2t^2}-\cos gt e^{-\frac{1}{2}At^2},$$

мы будем иметь

$$R = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ht}{t}\,T\,dt.$$

Пусть теперь τ — положительное число, выбор которого будет сделан позже.

Представляя величину R в форме

$$R = R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \frac{2}{\pi}\int_\tau^\infty \frac{\sin ht}{t}\,T\,dt;\quad R_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau \frac{\sin ht}{t}\,T\,dt,$$

будем искать верхние границы для $|R_1|$ и $|R_2|$.

Для этой цели заметим, что

$$|R_1| < \frac{2}{\pi}\int_\tau^\infty |T|\,\frac{dt}{t},\qquad |R_2| < \frac{2}{\pi}\int_0^\tau |T|\,\frac{dt}{t}$$

и что выражение для T, где ρ_i предполагаются положительными, приводит к двум следующим неравенствам:

$$|T| < \rho_1\rho_2\ldots\rho_n e^{-\varkappa^2 t^2} + e^{-\frac{1}{2}At^2},$$

$$|T| < \rho_1\rho_2\ldots\rho_n(1 - e^{-\varkappa^2 t^2}) + \left|\rho_1\rho_2\ldots\rho_n - e^{-\frac{1}{2}At^2}\right| +$$

$$+ |\cos(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n - gt) - \cos gt|\, e^{-\frac{1}{2}At^2},$$

из которых второе дает

$$|T| < \varkappa^2 t^2 \rho_1\rho_2\ldots\rho_n + \left|\rho_1\rho_2\ldots\rho_n - e^{-\frac{1}{2}At^2}\right| +$$

$$+ |\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n|\, e^{-\frac{1}{2}At^2}.$$

Мы используем первое неравенство для R_1 и второе для R_2.

Ввиду этого, что касается R_1, мы будем иметь,

$$|R_1| < \frac{2}{\pi}\int_{\tau}^{\infty} \rho_1\rho_2\ldots\rho_n e^{-\varkappa^2 t^2}\frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi\tau}\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}At^2}dt.$$

Затем, полагая τ_1 равным какому-либо числу, большему, чем τ, сможем написать

$$\int_{\tau}^{\infty} \rho_1\rho_2\ldots\rho_n e^{-\varkappa^2 t^2}\frac{dt}{t} < \frac{1}{\tau}\int_{\tau}^{\tau_1} \rho_1\rho_2\ldots\rho_n dt + \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_1}^{\infty} e^{-\varkappa^2 t^2}dt,$$

так как ρ_i никогда не превосходят 1.

Таким образом, замечая, что для $z > 0$ имеет место

$$\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dz < \frac{1}{2z}e^{-z^2},$$

мы получим

$$|R_1| < \frac{2}{\pi\tau}\int\limits_{\tau}^{\tau_1}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\,dt + \frac{1}{\pi\varkappa^2\tau_1^2}e^{-\varkappa^2\tau_1^2} + \frac{2}{\pi A\tau^2}e^{-\frac{1}{2}A\tau^2},$$

а, что касается R_2, будем иметь

$$|R_2| < \frac{2\varkappa^2}{\pi}\int\limits_0^{\tau} t\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\,dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\tau} Q\frac{dt}{t},$$

где

$$Q = \left|\rho_1\rho_2\ldots\rho_n - e^{-\frac{1}{2}At^2}\right| + |\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n|\,e^{-\frac{1}{2}At^2}.$$

Таким образом, приходим к исследованию верхнего предела $\rho_1\rho_2\ldots\rho_n$ в интервале (τ, τ_1) и верхних пределов величин

$$\rho_1\rho_2\ldots\rho_n,\quad \left|\rho_1\rho_2\ldots\rho_n - e^{-\frac{1}{2}At^2}\right|,\quad |\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n|$$

в интервале $(0, \tau)$.

Именно в оценке этих пределов наш настоящий анализ отличается от анализа предыдущего мемуара.

6

Вследствие того, что было изложено в п. 3, мы можем ограничиться предположением $\delta \leqslant 1$, и это предположение будет принято во всех последующих вычислениях.

При этом предположении, каково бы ни было действительное число z, мы будем иметь

$$\cos z < 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2^\delta}|z|^{2+\delta}, \tag{5}$$

$$|\sin z - z| < \frac{1}{2}|z|^{2+\delta}, \tag{6}$$

что видно из формул

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2} z^2 + z^2 \sin^2 \frac{\theta z}{2},$$

$$\sin z = z - \frac{1}{2} z^2 \sin \theta' z,$$

где θ и θ' обозначают величины, заключенные между 0 и 1.

Установив это, обратимся к формуле (2).

Из этой формулы выводим

$$\rho_i^2 = \sum \sum f_i(x) f_i(y) \cos (x - y) t,$$

где суммирования, относящиеся одно к x, другое к y, распространены на множество возможных значений переменной x_i.

Поэтому, в силу неравенства (5), а также неравенства

$$|x - y|^{2+\delta} < 2^{1+\delta} \{ |x - \alpha_i|^{2+\delta} + |y - \alpha_i|^{2+\delta} \},$$

и принимая во внимание формулы (1), получаем

$$\rho_i^2 < 1 - a_i t^2 + 4 d_i t^{2+\delta},$$

всякий раз, когда t положительно, что мы будем предполагать в дальнейшем.

Отсюда следует

$$\log \rho_i^2 < - a_i t^2 + 4 d_i t^{2+\delta}.$$

Поэтому, полагая

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = D.$$

получаем

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n < e^{-\frac{1}{2} A t^2 + 2 D t^{2+\delta}}. \qquad (7)$$

С другой стороны, в силу неравенства

$$\cos z > 1 - \frac{1}{2} z^2,$$

имеем

$$\rho_i^2 > 1 - a_i t^2,$$

что, если

$$a_i t^2 < 1,$$

дает

$$\log \rho_i^2 > -a_i t^2 - \frac{a_i^2 t^4}{2(1 - a_i t^2)}.$$

Затем, если предположить t достаточно малым, чтобы было

$$a_i t^2 < k^2, \tag{8}$$

где k — положительная дробь, определяемая уравнением

$$\frac{k^{2-\delta}}{2(1 - k^2)} = 4,$$

и используя нашу лемму, в силу которой (частный случай)

$$a_i^{2+\delta} < d_i^2,$$

будем иметь

$$\frac{a_i^2 t^4}{2(1 - a_i t^2)} < \frac{k^{2-\delta}}{2(1 - k^2)} (a_i t^2)^{\frac{2+\delta}{2}} < 4 d_i t^{2+\delta},$$

и полученное неравенство приводит к такому

$$\log \rho_i^2 > -a_i t^2 - 4 d_i t^{2+\delta}.$$

Следовательно, если условие (8) выполняется для всех значений i из последовательности

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

то мы будем иметь

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n > e^{-\frac{1}{2} A t^2 - 2 D t^{2+\delta}}.$$

Мы предположим, что число τ, введенное выше, достаточно мало, чтобы было

$$D\tau^{2+\delta} < k^{2+\delta}.$$

Тогда неравенство, которое мы только что получили, будет иметь место для всех значений t в интервале $(0, \tau)$.

Действительно, мы будем иметь

$$d_1 \tau^{2+\delta} < k^{2+\delta}, \quad d_2 \tau^{2+\delta} < k^{2+\delta}, \dots, \quad d_n \tau^{2+\delta} < k^{2+\delta},$$

и, следовательно,

$$a_1 \tau^2 < k^2, \quad a_2 \tau^2 < k^2, \dots, \quad a_n \tau^2 < k^2,$$

и это делает очевидным, что условие (8) будет выполнено в интервале $(0, \tau)$ для всех значений l, не превосходящих n.

Поэтому в интервале $(0, \tau)$ мы будем иметь

$$e^{-\frac{1}{2}At^2} - \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n < 2Dt^{2+\delta} e^{-\frac{1}{2}At^2}.$$

С другой стороны, неравенство (7) дает, для того же интервала,

$$\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n - e^{-\frac{1}{2}At^2} < 2Dt^{2+\delta} e^{-\frac{1}{2}At^2 + 2D\tau^\delta t^2}.$$

Следовательно, если положить

$$1 - 4\frac{D}{A}\tau^\delta = q,$$

получим

$$\left| \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n - e^{-\frac{1}{2}At^2} \right| < 2Dt^{2+\delta} e^{-\frac{1}{2}qAt^2}$$

для всех значений t из интервала $(0, \tau)$.

В то же время неравенство (7) даст:

для интервала $(0, \tau)$, $\quad \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n < e^{-\frac{1}{2}qAt^2}$,

для интервала $(0, \tau_1)$, $\quad \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n < e^{-\frac{1}{2}q_1 At^2}$,

где q_1 дается формулой

$$q_1 = 1 - 4\frac{D}{A}\tau_1^{\delta}.$$

Остается указать верхний предел для величины

$$|\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n|$$

в интервале $(0, \tau)$.

Для этой цели мы заметим, что первая из формул (2) дает

$$\rho_i \cos\sigma_i > 1 - \frac{1}{2} a_i t^2 > 1 - \frac{1}{2} k^2 > \frac{1}{2},$$

и вторая, которая может быть представлена в виде

$$\rho_i \sin\sigma_i = \sum f_i(x_i) \{\sin(x_i - \alpha_i)t - (x_i - \alpha_i)t\},$$

в силу неравенства (6), приводит к

$$\rho_i |\sin\sigma_i| < \frac{1}{2} d_i t^{2+\delta}.$$

Мы имеем, следовательно,

$$|\operatorname{tang}\sigma_i| < d_i t^{2+\delta},$$

и, если предположить, что σ_i обращается в нуль при $t = 0$, то отсюда следует

$$|\sigma_i| < d_i t^{2+\delta}.$$

Таким образом, мы получаем

$$|\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n| < Dt^{2+\delta} < Dt^{2+\delta} e^{2D\tau^{\delta}t^{2}}$$

для всех значений t в интервале $(0, \tau)$.

7

Вернемся к формулам п. 5.

В силу неравенств, которые мы только что получили и которые дают

$$Q < 3Dt^{2+\delta} e^{-\frac{1}{2} qAt^2},$$

мы будем иметь

$$|R_1| < \frac{2}{\pi\tau} \int_{\tau}^{\tau_1} e^{-\frac{1}{2} q_1 A t^2} dt + \frac{1}{\pi \varkappa^2 \tau_1^2} e^{-\varkappa^2 \tau_1^2} + \frac{2}{\pi A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} A\tau^2},$$

$$|R_2| < \frac{2\varkappa^2}{\pi} \int_0^{\tau} t e^{-\frac{1}{2} qAt^2} dt + \frac{6D}{\pi} \int_0^{\tau} t^{1+\delta} e^{-\frac{1}{2} qAt^2} dt.$$

В дальнейшем число τ_1 мы будем предполагать достаточно малым, чтобы было $q_1 > 0$. Тогда будет также и $q > 0$.

Поэтому, заменяя в предыдущих интегралах верхние пределы через ∞ и замечая, что

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} q_1 A t^2} dt < \frac{1}{q_1 A \tau} e^{-\frac{1}{2} q_1 A \tau^2},$$

$$\int_0^{\infty} t e^{-\frac{1}{2} qAt^2} dt = \frac{1}{qA},$$

$$\int_0^{\infty} t^{1+\delta} e^{-\frac{1}{2} qAt^2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{qA}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} + 1\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{2}{qA}\right)^{\frac{2+\delta}{2}},$$

мы будем иметь следующие неравенства:

$$|R_1| < \frac{2}{\pi q_1 A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 A \tau^2} + \frac{1}{\pi \varkappa^2 \tau_1^2} e^{-\varkappa^2 \tau_1^2} + \frac{2}{\pi A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} A \tau^2},$$

$$|R_2| < \frac{2\varkappa^2}{\pi q A} + \frac{3}{\pi} \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{D}{\sqrt{A^{2+\delta}}},$$

из которых первое, принимая во внимание, что $q_1 < 1$, мы можем заменить на такое

$$|R_1| < \frac{1}{\pi x^2 \tau_1^2} e^{-x^2 \tau_1^2} + \frac{4}{\pi q_1 A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 A \tau^2}.$$

Отсюда видно, что мы можем принять

$$L = \frac{1}{\pi x^2 \tau_1^2} e^{-x^2 \tau_1^2} + \frac{3}{\pi} \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{D}{\sqrt{A^{2+\delta}}} + \frac{2x^2}{\pi q A} + \frac{4}{\pi q_1 A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 A \tau^2}$$

и что неравенство

$$|R| < L$$

будет иметь место, каковы бы ни были положительные числа τ и τ_1, лишь бы только

$$4 \frac{D}{A} \tau_1^\delta < 1, \quad \tau < \tau_1, \quad D\tau^{2+\delta} < k^{2+\delta}, \tag{9}$$

где k — положительный корень уравнения

$$k^{2+\delta} = 8(1 - k^2).$$

Кроме того, так как эти условия являются единственными, которые должны быть выполнены, то неравенство (3) или неравенство (4), с тем же самым значением L, будут иметь место не только в частном случае, при котором мы провели предшествующие вычисления, но вообще во всех случаях, когда существуют математические ожидания, обозначенные нами через α_i, a_i, d_i.

Поэтому полученные результаты являются вполне общими, и мы можем опираться на них при доказательстве нашей теоремы во всей общности.

8

Предполагая, что условие теоремы выполнено, мы сможем выбрать для δ определенное положительное значение, удовлетворяющее неравенству $\delta \leqslant 1$, и такое, что величина

$$\frac{D^2}{A^{2+\delta}}$$

стремится к нулю для $n = \infty$.

Предположим, что число δ выбрано таким образом, и полагая

$$\frac{D}{\sqrt{A^{2+\delta}}} = \varepsilon^{3\delta},$$

обратимся к неравенству (4), которое имеет место, как мы видели, для всех значений z_1 и $z_2 > z_1$.

Обозначим второй член этого неравенства через Ω.

Принимая во внимание выражение для L, будем иметь

$$\Omega = \frac{8\lambda}{\sqrt{2\pi A}} + \frac{6}{\pi}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \varepsilon^{3\delta} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}} + \frac{2}{\pi\varkappa^2 \tau_1^2} e^{-\varkappa^2\tau_1^2} + \Omega',$$

где

$$\Omega' = \frac{4\varkappa^2}{\pi q A} + \frac{4\lambda^2}{\sqrt{2\pi e A}} + \frac{8}{\pi q_1 A \tau^2} e^{-\frac{1}{2} q_1 A \tau^2},$$

$$q = 1 - 4\frac{D}{A}\tau^{\delta}, \quad q_1 = 1 - 4\frac{D}{A}\tau_1^{\delta},$$

и видно, что Ω зависит от четырех неопределенных величин

$$\varkappa, \lambda, \tau, \tau_1.$$

Эти неопределенные величины связаны условиями (9), а также положительны, и все сводится к тому, чтобы показать, что ими можно так распорядиться, при сохранении упомянутых условий, чтобы Ω стремилась к нулю, когда ε стремится к нулю.

Что касается τ и τ_1, то для этого положим

$$A\tau^2 \varepsilon^{2\delta} = \mu^2, \quad \frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\mu}{\mu_1} \varepsilon^{3-\delta},$$

понимая под μ и μ_1 положительные, не зависящие от n числа.

Тогда будет

$$\frac{D}{A} \tau_1^{\delta} = \mu_1^{\delta}, \quad D\tau^{2+\delta} = \mu^{2+\delta} \varepsilon^{(1-\delta)\delta},$$

и условия (9) примут вид

$$4\mu_1^{\delta} < 1, \quad \mu\varepsilon^{3-\delta} < \mu_1, \quad \mu^{2+\delta} \varepsilon^{(1-\delta)\delta} < k^{2+\delta}.$$

Видно, стало-быть, что числа μ и μ_1 могут быть выбраны так, чтобы эти условия выполнялись, каково бы ни было n.

Установив это и заметив, что указанные выше формулы дают

$$x^2 \tau_1^2 = \mu_1^2 \frac{x^2}{A\varepsilon^6}, \quad A\tau^2 = \frac{\mu^2}{\varepsilon^{2\delta}},$$

$$q = 1 - 4\mu^{\delta} \varepsilon^{(3-\delta)\delta}, \quad q_1 = 1 - 4\mu_1^{\delta},$$

из выражения для Ω видим, что, при ε, стремящемся к нулю, Ω также стремится к нулю, всякий раз, когда величины

$$\frac{\lambda}{\sqrt{A}}, \quad \frac{x}{\lambda}, \quad \frac{A\varepsilon^6}{x^2} \tag{10}$$

стремятся к нулю.

Но, так как числа x и λ подчинены единственному ограничению — быть положительными, мы можем положить

$$\frac{\lambda}{\sqrt{A}} = \frac{3\varepsilon^3}{\mu_1} \log \frac{E}{\varepsilon}, \quad \frac{x}{\lambda} = \left(3 \log \frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

понимая под E какое-либо определенное число, большее рассматриваемых значений ε.

Тогда будет

$$\frac{A\varepsilon^6}{\varkappa^2} = \mu_1^2 \left(3 \log \frac{E}{\varepsilon}\right)^{-1},$$

и величины (10) действительно будут стремиться к нулю при $\varepsilon = 0$.

Установив, таким образом, возможность получить для Ω выражение, стремящееся к нулю при $\varepsilon = 0$, мы можем считать нашу теорему доказанной; ибо неравенство

$$|\Delta| < \Omega,$$

имеющее место, каковы бы ни были z_1 и z_2, и в котором вторая часть не зависит вовсе от этих чисел, показывает не только то, что, в условиях теоремы, Δ будет стремиться к нулю при $n = \infty$, но также и то, что эта величина стремится к нулю равномерно для всех значений z_1 и $z_2 > z_1$.

9

Важно сделать несколько замечаний относительно порядка Ω при предположениях, которые мы сделали относительно чисел $\varkappa, \lambda, \tau$ и τ_1.

В силу этих предположений, находим

$$\Omega = \frac{24}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon^3}{\mu_1} \log \frac{E}{\varepsilon} + \frac{6}{\pi} \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \varepsilon^{3\delta} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon^3}{E^3} \left(3 \log \frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon^3}{E^3} \left(3 \log \frac{E}{\varepsilon}\right)^{-1} + \Omega',$$

где Ω' является величиной порядка

$$\varepsilon^6 \left(\log \frac{E}{\varepsilon}\right)^2.$$

Видно, следовательно, что если $\delta < 1$, то Ω будет порядка $\varepsilon^{3\delta}$, и если $\delta = 1$, то Ω имеет порядок

$$\varepsilon^3 \log \frac{E}{\varepsilon}.$$

Что касается порядка ε, он будет зависеть, вообще, от выбора δ, но, во всех случаях, он будет самое большее равен $n^{-\frac{1}{6}}$.

Чтобы установить это, следует только заметить, что в силу леммы (частный случай)

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{2+\delta}<\left(\frac{d_1+d_2+\ldots+d_n}{n}\right)^2$$

и поэтому

$$A^{2+\delta}<D^2 n^{\delta},$$

что дает

$$\varepsilon^3>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда видно, что порядок нашего выражения Ω никогда не может превысить порядка

$$\frac{\log n}{\sqrt{n}}.$$

Но он сможет достигнуть этого порядка, что будет иметь место при предположении $\delta=1$, если все величины

$$d_1, d_2, d_3, \ldots,$$

соответствующие этому значению δ, остаются меньше некоторого предела и если, в то же время, величина

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

как бы велико ни было n, не может стать меньше определенного положительного числа.

Во всех случах, порядок вышеуказанного выражения Ω будет зависеть от выбора числа δ. Этот выбор, в известных пределах, в нашем распоряжении и, в каждом частном случае, можно установить для δ наиболее выгодное значение, т. е. приводящее к наиболее высокому порядку для Ω. Однако по этому поводу нет возможности дать более определенных общих указаний.

Предположим, например, что условие теоремы выполняется для $\delta=1$, или даже для значений δ, больших 1.

Тогда в предшествующих формулах за δ можно будет принять какое-либо положительное число, не превосходящее 1. Но, не делая дополнительных предположений, нельзя решить, какое из этих значений является самым выгодным.

В случае, который мы указали, это была 1; но так будет не всегда и, в некоторых случаях, следует взять значение, меньшее 1.

Чтобы это показать, укажем пример.

Пусть, для всех целых положительных значений m,

$$-m^{\frac{2}{5}},\quad -m^{-\frac{2}{5}},\quad 0,\ m^{-\frac{2}{5}},\quad m^{\frac{2}{5}}$$

суть возможные значения x_m и

$$\frac{1}{4}\frac{1}{m^2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m^2}\right),\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\frac{1}{m^2}$$

— вероятности этих значений.

Мы будем иметь

$$a_m=\frac{1}{2}m^{-\frac{6}{5}}+\frac{1}{2}m^{-\frac{4}{5}},\quad d_m=\frac{1}{2}m^{\frac{2(\delta-3)}{5}}+\frac{1}{2}m^{-\frac{2(\delta+2)}{5}}.$$

Отсюда видно, что, для n, стремящегося к ∞, A будет бесконечно большим порядка $n^{\frac{1}{5}}$. Что касается D, то оно будет бесконечно большим

$$\begin{array}{llll} \text{порядка} & n^{\frac{1-2\delta}{5}}, & \text{если} & \delta<\frac{1}{2}, \\ \text{»}\quad\text{»} & \log n, & \text{»} & \delta=\frac{1}{2}, \\ \text{»}\quad\text{»} & n^{\frac{2\delta-1}{5}}, & \text{»} & \delta>\frac{1}{2}. \end{array}$$

Следовательно, величина

$$\frac{D}{\sqrt{A^{2+\delta}}}=\varepsilon^{3\delta}$$

$$\begin{array}{llll} \text{будет порядка} & n^{-\frac{\delta}{2}}, & \text{если} & \delta<\frac{1}{2}, \\ \text{»} \qquad \text{»} & n^{-\frac{1}{4}}\log n, & \text{»} & \delta=\frac{1}{2}, \\ \text{»} \qquad \text{»} & n^{-\frac{4-3\delta}{10}}, & \text{»} & \delta>\frac{1}{2}. \end{array}$$

Поэтому условие теоремы будет выполнено для всех значений δ меньших $\frac{4}{3}$. Тем не менее не 1, а $\frac{1}{2}$ является наиболее выгодным значением.

Заметим, что могут даже встретиться случаи, когда не имеется никакого определенного значения δ, которое можно было бы назвать наиболее выгодным, и что, при такого рода исследованиях, может появиться необходимость рассматривать значения δ, зависящие от числа n.

10

Теперь мы применим нашу теорему к некоторым важным частным случаям.

Прежде всего рассмотрим случай, когда

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

являются значениями одной и той же переменной x, значениями, которые она принимает при различных испытаниях, производящихся при одинаковых условиях.

Тогда мы будем иметь

$$x_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha,$$
$$a_1=a_2=a_3=\ldots=a,$$
$$d_1=d_2=d_3=\ldots=d,$$

где α, a, d являются математическими ожиданиями соответственно

$$x, \quad (x-\alpha)^2, \quad |x-\alpha|^{2+\delta},$$

и получаем

$$\frac{(d_1+d_2+\ldots+d_n)^2}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{2+\delta}}=\frac{d^2}{a^{2+\delta}}\,n^{-\delta}.$$

Итак, видим, что условие теоремы будет выполнено, каково бы ни было число δ, лишь бы только существовала соответствующая величина d.

Следовательно, мы приходим к такому предложению:

Пусть обозначено: через α математическое ожидание x, через a математическое ожидание $(x-\alpha)^2$ и через z_1 и $z_2>z_1$ какие-либо два данных числа; тогда вероятность того, что среднее арифметическое значений x при n испытаниях заключено между пределами

$$\alpha+z_1\sqrt{\frac{2a}{n}} \text{ и } \alpha+z_2\sqrt{\frac{2a}{n}},$$

стремится, для $n=\infty$, равномерно к

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\,dz,$$

всякий раз, как возможно указать положительное значение δ, которое может быть как угодно малым, для которого существует математическое ожидание величины $|x-\alpha|^{2+\delta}$.

11

Теперь мы рассмотрим случай, когда существуют математические ожидания величин

$$|x_1-\alpha_1|^m, \quad |x_2-\alpha_2|^m, \quad |x_3-\alpha_3|^m, \ldots,$$

сколь бы большим ни было положительное число m, и когда, при любом данном m, эти математические ожидания не превосходят некоторого предела (который может, однако, зависеть от числа m).

В этом случае, соответствующем теореме Чебышева, наша общая теорема приводит к следующему:

Если, для всех данных значений положительного числа m, математические ожидания величин

$$|x_1-\alpha_1|^m, \quad |x_2-\alpha_2|^m, \quad |x_3-\alpha_3|^m, \ldots$$

остаются меньше некоторого предела, вероятность неравенств

$$z_1 < \frac{x_1-\alpha_1+x_2-\alpha_2+\ldots+x_n-\alpha_n}{\sqrt{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}} < z_2,$$

каковы бы ни были данные числа z_1 и $z_2 > z_1$, стремится, для $n=\infty$, к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\,dz_1$$

и притом равномерно, всякий раз, когда возможно назначить определенное положительное число β, которое может быть как угодно малым, для которого величина

$$\frac{n^\beta}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

стремится к нулю, когда n беспредельно возрастает.

Для доказательства этой теоремы, где следует, очевидно, предположить $\beta < 1$, достаточно только взять

$$\delta = \frac{2(1-\beta)}{\beta}.$$

Тогда, если обозначить верхнюю границу величин

$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

через L, получим

$$\frac{(d_1 + d_2 + \ldots + d_n)^2}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{2+\delta}} < L^2 \left(\frac{n^\beta}{a_1 + a_3 + \ldots + a_n} \right)^{\frac{2}{\beta}},$$

откуда видно, что, при условиях рассматриваемой теоремы условие нашей общей теоремы будет выполнено.

Первое из двух условий теоремы, относящееся к математическим ожиданиям величин

$$|x_1 - \alpha_1|^m, \quad |x_2 - \alpha_2|^m, \quad |x_3 - \alpha_3|^m, \ldots,$$

было указано самим Чебышевым. Что касается второго, относящегося к a_i, то оно не содержится в формулировке, которую дал теореме великий геометр.

Необходимость дополнительного условия такого рода была указана Марковым. Однако условие, указанное нами здесь, является более общим, чем условие Маркова, состоящее в том, что величина

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

должна иметь верхнюю границу.

Некрасов в работе, о вероятностях сумм, которую он опубликовал,[1] утверждает, что дополнительное условие

[1] П. А. Некрасов. Новые основания учения о вероятностях сумм и средних величин. Москва, 1901 (Отдельный оттиск из «Математического Сборника», т. XXI—XXII), стр. 292, 293.

Маркова может быть заменено еще более общим, которое требует только, чтобы величина

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

при n, стремящемся к бесконечности, возрастала выше всякого предела.

Как мы покажем в следующем параграфе, в некоторых случаях это условие действительно достаточно. Но, вообще, оно не является достаточным, что можно видеть из примеров, как это было замечено уже Марковым.

12

Вернемся к нашей общей теореме.

Условие этой теоремы, как это непосредственно видно, требует, чтобы ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

был расходящимся, но, вообще, оно не накладывает на характер этой расходимости никакого ограничения.

Поэтому, естественно спросить себя, не существует ли случаев, когда указанная расходимость, сама по себе, является достаточным условием.

Подобные случаи действительно являются возможными, и, чтобы дать пример, мы рассмотрим случай теоремы Пуассона, относящейся к закону больших чисел.

Итак, предположим, что для каждой из переменных x_i, возможными значениями являются 0 и 1.

Обозначая вероятность равенства $x_i = 1$ через p_i и, следовательно, вероятность равенства $x_i = 0$ через $1 - p_i$, мы будем иметь

$$\alpha_i = p_i, \quad a_i = p_i(1 - p_i), \quad d_i = p_i(1 - p_i)^{2+\delta} + (1 - p_i)\, p_i^{2+\delta}.$$

Отсюда вытекает

$$d_i < p_i(1-p_i)^2 + (1-p_i)\,p_i^2 = a_i$$

и, следовательно,

$$\frac{(d_1+d_2+\ldots+d_n)^2}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{2+\delta}} < \frac{1}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{\delta}}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае условие нашей теоремы будет выполнено всякий раз, когда ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

будет расходящимся, каков бы ни был характер его расходимости.

Итак, мы можем формировать следующую теорему:

Рассматривается событие, вероятностями которого, для различных испытаний, являются указанные наперед числа

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots,$$

и через m обозначается число его осуществлений при n испытаниях. Тогда, всякий раз, когда ряд

$$p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)+p_3(1-p_3)+\ldots$$

расходится, вероятность P неравенств

$$z_1 < \frac{m-(p_1+p_2+\ldots+p_n)}{\sqrt{2p_1(1-p_1)+\ldots+2p_n(1-p_n)}} < z_2,$$

где z_1 и $z_2 > z_1$ — какие-либо данные числа, стремится, для $n=\infty$, к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\,dz,$$

и притом равномерно для всех значений z_1 и z_2.

Прибавим, что порядок разности

$$P - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

каковы бы ни были z_1 и z_2, не будет меньшим, чем порядок величины

$$\frac{\log[p_1(1-p_1)+\ldots+p_n(1-p_n)]}{\sqrt{p_1(1-p_1)+\ldots+p_n(1-p_n)}}.$$

ИССЛЕДОВАНИЯ В ТЕОРИИ ФИГУРЫ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ



Если принять гипотезу, что небесные тела вначале были жидкими, то их фигуры (не принимая в расчет их взаимного влияния) должны быть фигурами жидкой массы, все частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона и которая равномерно вращается вокруг неподвижной оси.

Отправляясь от этой гипотезы, приходят для неоднородной жидкости к изысканию фигур различных поверхностей уровня, из которых одна будет совпадать с поверхностью всей массы. На каждой из этих поверхностей плотность будет сохранять постоянное значение, меняющееся от одной поверхности к другой, так что, если поверхности уровня определяются значениями некоторого параметра, то плотность будет функцией этого параметра. Эта функция, выражающая то, что называется *закон плотностей*, может быть выбрана произвольно и, чтобы сделать задачу определенной, надо высказать о ней ту или иную гипотезу.

Именно с этой точки зрения вопрос был рассмотрен Клэро, который показал, что если вращение чрезвычайно медленное, то поверхности уровня будут, с большой степенью точности, поверхностями эллипсоидов вращения. Однако этот результат справедлив лишь в первом приближении, и теория Клэро не позволяет продолжить приближения дальше.

Теория, лишенная этого неудобства, была развита затем Лежандром и Лапласом, которые предложили методы, позво-

ляющие продвинуться, в построении последовательных приближений, как угодно далеко.

Эта теория в настоящее время — общепризнанная, и она входит в трактаты небесной механики. Однако же она оставляет желать многого, так как даже в случае медленного вращения не задавались до настоящего времени вопросом, будут ли ряды, к которым она окончательно приводит, сходящимися.

Другое обстоятельство, наносящее вред строгости теории, заключается в том, что при выполнении вычислений пользуются некоторым разложением потенциала, законность которого никак не доказывается.

Это обстоятельство было отмечено еще Пуассоном, который старался устранить недостаток в «*Additions à la Connaissance des Temps*» за 1829 г. Но анализ этого великого геометра не может рассматриваться как достаточный и, строго говоря, он не устраняет возражения.

В последнее время вопрос был снова рассмотрен Калландро (Callandreau, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 58-ème cahier). Однако Калландро установил лишь, что если некоторый ряд сходится, то этот последний изображает потенциал, но, что касается сходимости, — он ставит ее в зависимость от таких условий, которые нельзя допустить a priori.

Следовательно, рассматриваемая теория все еще страдает указанным недостатком и, таким образом, требует дополнений в различных отношениях.

Это и вызвало мои исследования по данному предмету, часть которых я предлагаю здесь с кратким содержанием главных результатов, к которым я пришел.

Прежде всего я старался освободить теорию от применения того разложения, о котором шла речь, что мне и удалось сделать, показав, что та же самая цель может быть достигнута другим приемом, свободным от всякой трудно-

сти. Основное, что следует сделать, приступая к задаче, это представить потенциал в виде ряда, расположенного по членам различных порядков по отношению к малому количеству, представляющему уклонение поверхностей уровня от сферических поверхностей, от которых они по предположению незначительно отличаются. Я показал, как можно достичь этой цели без применения разложения, которым пользовались Лежандр, Лаплас и Пуассон. Правда, я должен был сделать для этого некоторые предположения относительно неизвестной функции; но эти предположения, сами по себе весьма естественные, обладают большой общностью, и, наконец, оправдываются окончательным результатом моих исследований.

Затем я изучил уравнения, от которых зависит вычисление приближений различных порядков и из которых первое уравнение есть знаменитое уравнение Клэро.

Эти уравнения рассматривались уже многими геометрами. Но, мне кажется, что никто не рассматривал их в таких общих предположениях о законе плотностей; так как все, что я предполагаю, состоит лишь в том, что плотность, всегда конечная, постоянно убывает, когда переходим от одной поверхности уровня к другой, перемещаясь от центра к поверхности жидкости, понимая под центром общий центр тех концентрических сферических поверхностей, от которых поверхности уровня по предположению мало отличаются.

Надо заметить, что, в силу некоторых соображений об устойчивости, это предположение допускается всеми геометрами, которые рассматривали этот вопрос. Но, обычно, делают еще другие предположения и, в частности, допускают некоторое разложение для плотности вблизи центра. Я же предполагаю лишь, что плотность конечна в центре, и для функции, изображающей закон плотностей, я не принимаю никакого аналитического выражения. Добавлю, что в моих исследованиях плотность может быть разрывной и что

может существовать даже бесконечное число поверхностей уровня, через которые она переходит, меняясь скачком; при своем изменении плотность должна лишь возрастать к центру. Кроме того, даже там, где плотность непрерывна, мой анализ не предполагает существования производной для функции, выражающей закон плотностей [1].

Наконец, оставаясь все время в этих общих предположениях, я занимался вопросом о сходимости рядов, к которым приводят последовательные приближения.

Я располагаю эти ряды по восходящим степеням некоторого параметра, который вводят, обычно, в рассматриваемую теорию и который представляет, с некоторым приближением, отношение центробежной силы под экватором к силе тяжести; изучение вопроса привело меня к тому неожиданному результату, что можно указать *вполне определенное* число (не зависящее ни от закона плотностей, ни от какого-либо другого физического элемента) такое, что если введенный выше параметр меньше его, то ряды, о которых идет речь, будут абсолютно и равномерно сходящимися во всей массе жидкости.

Разумеется, оценка значения наибольшего возможного числа этого рода есть задача очень трудная, и я не старался ее решать: я ограничился лишь отысканием формул, позволяющих указать для этого наибольшего числа нижний предел — более или менее точный. К сожалению, мои формулы, хотя и много раз переделанные, еще недостаточно точные, чтобы можно было ими удовлетвориться. Правда, они уже получили одно применение к небесной механике, как это можно видеть в последнем параграфе предлагаемого мемуара; но для наиболее важных приложений они еще слишком грубые.

Поэтому я ограничусь в дальнейшем лишь указанием этих формул, откладывая опубликование своего анализа до времени получения более точных результатов.

1

Рассмотрим некоторую массу жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона и которая вращается равномерно вокруг оси; эту ось мы возьмем за ось z прямоугольных координат x, y, z.

Пусть будет: f — постоянная всемирного тяготения, fU — потенциал жидкой массы в точке (x, y, z), ρ — плотность в той же точке и ω — угловая скорость вращения.

Условия равновесия приводятся, как известно, к тому, что на поверхности жидкости, а равно и на всякой другой поверхности уровня (поверхность постоянного давления), ρ и

$$U + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2)$$

должны сохранять постоянные значения. Таким образом, если предположить, что поверхности уровня отличаются друг от друга значениями некоторого параметра a, то эти условия выразятся так:

$$\rho = \text{функции } a,$$

$$U + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2) = \text{функции } a. \tag{1}$$

Первое из этих уравнений представляет закон плотностей, и функция a, которая в нем присутствует, может быть рассматриваема, как данное задачи.

Что же касается второго — это есть основное уравнение от которого и зависит решение задачи.

Для определенности мы возьмем за a радиус сферы, объем которой равен объему, ограниченному соответствующей поверхностью уровня. Сверх того, рассматривая лишь случай очень медленного вращения, мы будем предполагать, что поверхности уровня — выпуклые и мало уклоняются от поверхностей концентрических сфер,

имеющих центр в некоторой точке, лежащей на оси вращения.[1]

Мы возьмем эту точку за начало координат. Тогда, если ввести полярные координаты r, θ, ψ, полагая

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \qquad y = r\sin\theta\sin\psi, \qquad z = r\cos\theta,$$

то уравнение поверхностей уровня может быть представлено в виде

$$r = a(1+\zeta),$$

где ζ есть функция a, θ, ψ, все значения которой весьма малы; чтобы получить все поверхности уровня, надо a изменять от 0 до некоторого значения A, которое будет соответствовать поверхности жидкости.

Основным неизвестным будет функция ζ, которую следует определить из уравнения (1), где предполагается, что ρ есть данная функция a.

Кроме уравнения (1), ζ должна еще удовлетворять некоторому условию, вытекающему из принятого определения a. Укажем это условие.

Если понимать под $d\sigma$ элемент поверхности сферы радиуса 1, имеющей центр в начале координат, так что можно положить

$$d\sigma = \sin\theta d\theta d\psi,$$

то объем, ограниченный поверхностью уровня, будет, очевидно, даваться формулой

$$\frac{1}{3}a^3\int(1+\zeta)^3 d\sigma,$$

где интеграция распространяется на всю поверхность сферы.

Отсюда, по определению a, мы будем иметь

$$\int(1+\zeta)^3 d\sigma = 4\pi. \tag{2}$$

[1] Заметим, что эта точка будет совпадать с центром тяжести жидкой массы. Но это условие можно и не вводить a priori.

Заметим, что, в силу этого условия, мы получим для массы M жидкости такое простое выражение

$$M = 4\pi \int_0^A \rho a^2 \, da.$$

Действительно, имеем

$$M = \int_0^A \rho a^2 \, da \int (1 + \zeta)^2 \left(1 + \frac{\partial a\zeta}{\partial a}\right) d\sigma,$$

и условие (2) дает

$$\int (1 + \zeta)^2 \left(1 + \frac{\partial a\zeta}{\partial a}\right) d\sigma = 4\pi.$$

Введем, вместо ω, параметр $\varkappa$, определяемый формулой

$$\varkappa = \frac{\omega^2 A^3}{fM};$$

из этой формулы видно, что если пренебречь ζ, то $\varkappa$ будет представлять собою отношение центробежной силы к силе тяжести на поверхности жидкости под экватором.

Если, затем, ввести вместо $x^2 + y^2$ его выражение

$$a^2 (1 + \zeta)^2 \sin^2 \theta,$$

то уравнение (1) станет таким

$$U + \frac{M}{2A^3} \varkappa a^2 (1 + \zeta)^2 \sin^2 \theta = \text{функции } a; \tag{3}$$

и теперь остается лишь подставить вместо U его выражение, которое мы сейчас и укажем.

Рассмотрим, кроме точки (r, θ, ψ), другую точку жидкой массы, полярные координаты которой пусть будут r', θ', ψ', и обозначим через $a', \rho', \zeta', d\sigma'$ количества, относящиеся к этой точке и имеющие то же значение, что и $a, \rho, \zeta, d\sigma$.

Тогда, понимая под Δ взаимное расстояние между точками (r, θ, ψ) и (r', θ', ψ'), будем иметь

$$U = \int_0^A \rho' a'^2 da' \int (1+\zeta')^2 \left(1 + \frac{\partial a' \zeta'}{\partial a'}\right) \frac{d\sigma'}{\Delta}, \tag{4}$$

где интеграл, относящийся к $d\sigma'$, распространен на всю поверхность сферы радиуса 1.

В этой формуле

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi},$$

где

$$\cos\varphi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\psi - \psi'),$$

и где следует положить

$$r' = a'(1+\zeta').$$

Если точка (r, θ, ψ) принадлежит жидкой массе, как это имеет место в уравнении (3), то надо положить также $r = a(1+\zeta)$, и тогда будем иметь

$$\Delta = \sqrt{a^2(1+\zeta)^2 + a'^2(1+\zeta')^2 - 2aa'(1+\zeta)(1+\zeta')\cos\varphi}.$$

Заметим, что уравнение (3) содержит, во второй своей части, неизвестную функцию a. Но это обстоятельство не поведет к какой-либо неопределенности, ввиду наличия добавочного уравнения (2).

2

Чтобы приступить к рассматриваемой задаче, надо изобразить потенциал в виде такого ряда, в котором были бы выделены члены различных порядков по отношению к ζ.

С этой целью, по примеру Лежандра и Лапласа, обычно начинают с разложения функции $\frac{1}{\Delta}$ по восходящим или

нисходящим степеням r, в зависимости от того, будет ли $r' > r$ или $r' < r$, что дает для потенциала разложение по сферическим функциям углов θ и ψ, и затем, полагая

$$r = a(1 + \zeta),$$

вычисляют члены различных порядков для каждого из членов разложения, так полученного.

Именно применение этого разложения вызывает то затруднение, о котором мы говорили выше.

Однако же прием, который мы указали, не является необходимым, так как возможно вычислить члены различных порядков непосредственно для потенциала, что приведет к ряду необходимого вида без применения разложений, о которых идет речь, и мы теперь покажем, что этот ряд будет сходящимся при весьма общих условиях.

Мы могли бы сохранить здесь общую точку зрения; но, для рассматриваемой задачи достаточно ограничиться предположением, что ζ не зависит от ψ и что это есть четная функция от

$$\mu = \cos\theta;$$

мы примем это, чтобы не вводить ненужных усложнений.

Будем предполагать, кроме того, что производные

$$\frac{\partial\zeta}{\partial(\mu^2)}, \qquad \frac{\partial a\zeta}{\partial a}$$

существуют для всех рассматриваемых значений a и μ и что не только ζ, но и эти производные остаются всегда достаточно малыми по абсолютному значению,[1] так что можно

[1] Вместо производной $\frac{\partial\zeta}{\partial\mu^2}$ мы могли бы ввести производную $\frac{\partial\zeta}{\partial\mu}$ или даже $\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}$; но рассмотрение производной $\frac{\partial\zeta}{\partial\mu^2}$ дает некоторое преимущество при изучении сходимости рядов, которые получаются окончательно для функций ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial a}$, и только по этой причине мы ее вводим.

указать положительные числа l, g, h, удовлетворяющие неравенству

$$l^2+g^2+h^2<1$$

и такие, чтобы было

$$|\zeta|<l, \qquad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\mu^2}\right|<g, \qquad \left|\frac{\partial a\zeta}{\partial a}\right|<h$$

для всех значений a в интервале $(0, A)$ и для всех значений μ^2 в интервале $(0, 1)$.

Приняв это, заменим в выражении (4) функции U количества ζ и ζ' через $\varepsilon\zeta$ и $\varepsilon\zeta'$, подразумевая под ε произвольный параметр.

Полагая

$$\sqrt{a^2+a'^2-2aa'\cos\varphi}=D,$$

$$\frac{a^2\zeta+a'^2\zeta'-aa'(\zeta+\zeta')\cos\varphi}{D^2}=v,$$

$$\frac{a^2\zeta^2+a'^2\zeta'^2-2aa'\zeta\zeta'\cos\varphi}{D^2}=w,$$

так что будет

$$\Delta=D\sqrt{1+2v+w},$$

мы получим, таким образом, следующее выражение:

$$\int\limits_0^A \rho' a'^2\,da' \int \frac{(1+\varepsilon\zeta')^2\left(1+\varepsilon\dfrac{\partial a'\zeta'}{\partial a'}\right)}{\sqrt{1+2\varepsilon v+\varepsilon^2 w}}\,\frac{d\sigma'}{D}, \tag{5}$$

которое будет некоторой функцией ε; мы покажем, что при допущенных условиях, эта функция будет разложима по восходящим степеням ε по крайней мере для $|\varepsilon|\leqslant 1$.

Для этого достаточно показать, что функция

$$(1+2\varepsilon v+\varepsilon^2 w)^{-\frac{1}{2}},$$

при $|\varepsilon| \leqslant 1$, разложима по степеням ε в ряд, равномерно сходящийся для всех значений a' в интервале $(0, A)$ и для всех значений θ' и ψ', которые можно подчинить неравенствам

$$0 \leqslant \theta' \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \psi' \leqslant 2\pi.$$

Но, имеем

$$1 + 2\varepsilon v + \varepsilon^2 w = [1 + (v + \sqrt{v^2 - w})\varepsilon]\,[1 + (v - \sqrt{v^2 - w})\varepsilon],$$

и по самой природе этого выражения должны иметь $v^2 < w$, что, впрочем, непосредственно следует из тождества

$$w - v^2 = \frac{a^2 a'^2 (\zeta - \zeta')^2 \sin^2 \varphi}{D^4}.$$

Итак, модуль каждого из количеств

$$v + \sqrt{v^2 - w}, \qquad v - \sqrt{v^2 - w}$$

будет равен $\sqrt{w}$, откуда видно, что наше предложение будет установлено, если можно будет показать, что w никогда не превосходит некоторого определенного числа, меньшего, чем 1 [2].

Установив это, заметим, что

$$w = \frac{(a\zeta - a'\zeta')^2}{D^2} + \frac{2aa'\zeta\zeta'(1 - \cos\varphi)}{D^2},$$

что, в силу неравенств

$$|\zeta\zeta'| < l^2, \qquad 2aa'(1 - \cos\varphi) < D^2$$

дает

$$w < l^2 + \frac{(a\zeta - a'\zeta')^2}{D^2}.$$

Но, если временно положить

$$\zeta = f(a, \mu^2), \qquad \zeta' = f(a', \mu'^2),$$

то можно будет написать

$$a\zeta - a'\zeta' = af(a, \mu^2) - \sqrt{aa'}\, f(\sqrt{aa'}, \mu^2) +$$
$$+ \sqrt{aa'}\, f(\sqrt{aa'}, \mu'^2) - a'\, f(a', \mu'^2) +$$
$$+ \sqrt{aa'}\, \{f(\sqrt{aa'}\, \mu^2) - f(\sqrt{aa'}, \mu'^2)\},$$

и в силу того, что мы приняли, имеем [3]

$$|af(a, \mu^2) - \sqrt{aa'}\, f(\sqrt{aa'}, \mu^2)| < h\, |a - \sqrt{aa'}|,$$
$$|\sqrt{aa'}\, f(\sqrt{aa'}, \mu'^2) - a' f(a', \mu'^2)| < h\, |\sqrt{aa'} - a'|,$$
$$|f(\sqrt{aa'}, \mu^2) - f(\sqrt{aa'}, \mu'^2)| < g\, |\mu^2 - \mu'^2|.$$

Итак, ввиду того, что количества $a - \sqrt{aa'}$ и $\sqrt{aa'} - a'$ имеют одинаковой знак [4], будем иметь

$$|a\zeta - a'\zeta'| < h\, |a - a'| + g\sqrt{aa'}\, |\cos^2\theta - \cos^2\theta'|.$$

С другой стороны, имеем

$$\cos^2\theta - \cos^2\theta' = \sin(\theta + \theta')\sin(\theta' - \theta),$$

что дает

$$|\cos^2\theta - \cos^2\theta'| < |\sin(\theta' - \theta)| < 2\left|\sin\frac{\theta - \theta'}{2}\right|,$$

и так как

$$1 - \cos\varphi = 1 - \cos(\theta - \theta') +$$
$$+ \sin\theta\sin\theta'[1 - \cos(\psi - \psi')] > 1 - \cos(\theta - \theta') = 2\sin^2\frac{\theta - \theta'}{2},$$

что приводит к неравенству

$$D^2 > (a - a')^2 + 4aa'\sin^2\frac{\theta - \theta'}{2},$$

то будем иметь

$$\frac{|a\zeta - a'\zeta'|}{D} < \frac{h\,|a - a'| + gb}{\sqrt{(a - a')^2 + b^2}},$$

полагая, для краткости,

$$2\sqrt{aa'}\left|\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right|=b.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{|a\zeta-a'\zeta'|}{D}<\sqrt{g^2+h^2}, \tag{6}$$

и, следовательно,

$$w<l^2+g^2+h^2.$$

Наше предложение, таким образом, доказано, ибо мы предполагали, что число $l^2+g^2+h^2$ меньше, чем 1.

Итак, пусть

$$U_0+U_1\varepsilon+U_2\varepsilon^2+\ldots$$

будет разложением выражения (5).

Полагая $\varepsilon=1$, мы выводим из него искомое разложение

$$U=U_0+U_1+U_2+\ldots, \tag{7}$$

которое, при принятых условиях, будет, очевидно, абсолютно сходящимся.

Если ζ и $\frac{\partial a\zeta}{\partial a}$ рассматривать, как малые количества первого порядка, то член U_n этого разложения будет n-го порядка.

3

Для U_n легко получить явное выражение.

Что касается U_0, мы будем иметь просто

$$U_0=\int_0^A \rho' a'^2\,da'\int\frac{d\sigma'}{D},$$

что приводится к [5]

$$U_0=\frac{4\pi}{a}\int_0^a \rho a^2\,da+4\pi\int_a^A \rho a\,da.$$

Переходя затем к случаю $n > 0$, введем следующие обозначения:

$$a'^2 \int (1+\zeta')^2 \frac{d\sigma'}{\Delta} = R, \qquad a'^2 \int (1+\zeta')^2 \frac{\partial a'\zeta'}{\partial a'} \frac{d\sigma'}{\Delta} = S,$$

откуда вытекает, что

$$U = \int\limits_0^A \rho' (R + S)\, da'.$$

Предположим теперь, что в выражениях R и S величина ζ заменена через $\varepsilon\zeta$, а величина ζ' — через $\varepsilon\zeta'$, и результаты разложены по степеням ε.

Пусть

$$R_0 + R_1\varepsilon + R_2\varepsilon^2 + \ldots, \quad S_1\varepsilon + S_2\varepsilon^2 + \ldots$$

полученные таким образом разложения.

Легко видеть, что, для $n > 0$, будем иметь [6]

$$R_n = \sum \frac{a^i\zeta^i}{i!\,j!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial a^i\, \partial b^j} \int \frac{(a'\zeta')^j\, b^2\, d\sigma'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} \right\}_{b=a'},$$

$$S_n = \sum \frac{a^i\zeta^i}{i!\,j!} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^i\, \partial b^j} \int \frac{(a'\zeta')^j \frac{\partial a'\zeta'}{\partial a'}\, b^2\, d\sigma'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} \right\}_{b=a'},$$

где следует положить после дифференцирования, как это и указано, $b = a'$, и где суммирования распространяются на все значения i и j, принадлежащие последовательности

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

и удовлетворяющие, для R_n, равенству

$$i + j = n$$

и, для S_n, равенству

$$i + j = n - 1.$$

С помощью этих выражений R_n и S_n, в которых случай $a'=a$ должен рассматриваться как предельный, мы будем иметь

$$U_n=\int_0^A \rho'(R_n+S_n)\,da'.$$

Но эта формула может быть еще несколько упрощена.

Для этого заметим, что в выражении R_n член, соответствующий $j=0$, равен

$$\frac{a^n\zeta^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\int\frac{a'^2}{D}\,d\sigma'$$

и приводится, таким образом, для $a'<a$, к [7]

$$4\pi\frac{a'^2}{a}(-\zeta)^n$$

и, для $a'>a$, к нулю. Что же касается других членов, то их сумма может быть записана так:

$$\sum\frac{a^i\zeta^i}{i!(j+1)!}\left\{\frac{\partial^n}{\partial a^i\,\partial b^{j+1}}\int\frac{(a'\zeta')^{j+1}b^2\,d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}\right\}_{b=a'},$$

где суммирование распространяется на те же значения i и j, как и для S_n.

Что же касается S_n, то, если $\frac{\partial a\zeta}{\partial a}$ есть непрерывная функция a, можно написать

$$S_n=\sum\frac{a^i\zeta^i}{i!(j+1)!}\left\{\frac{\partial^n}{\partial a^i\,\partial b^j\,\partial a'}\int\frac{(a'\zeta')^{j+1}b^2\,d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}\right\}_{b=a'}.$$

Допустим это и положим

$$T_n=\sum\frac{a^i\zeta^i}{i!(j+1)!}\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^i\,\partial b^j}\int\frac{(a'\zeta')^{j+1}b^2\,d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}\right\}_{b=a'},$$

где сумма распространяется на значения i и j, удовлетворяющие равенству

$$i+j=n-1.$$

Отсюда получаем: для $a'<a$,

$$R_n+S_n=4\pi\frac{a'^2}{a}(-\zeta)^n+\frac{\partial T_n}{\partial a'}$$

и, для $a'>a$,

$$R_n+S_n=\frac{\partial T_n}{\partial a'}.$$

Следовательно, мы будем иметь

$$U_n=\frac{4\pi}{a}(-\zeta)^n\int_0^a \rho a^2\,da+\int_0^A \rho'\frac{\partial T_n}{\partial a'}\,da', \tag{8}$$

а это и есть искомая формула.

Для дальнейшего полезно заметить, что, в наших условиях, R_n и S_n не испытывают разрыва для $a'=a$. Действительно, в этих условиях v и w, рассматриваемые как функции одного переменного a', будут, очевидно, непрерывными даже при $a'=a$. Следовательно, R и S, так же как и выражения, получаемые из них заменой ζ и ζ' на $\varepsilon\zeta$ и $\varepsilon\zeta'$, будут все еще непрерывными для $a'=a$; из этого следует, что R_n и S_n будут также обладать этим свойством.

В силу этого, если $\frac{\partial(R_n+S_n)}{\partial a}$ не обращается в бесконечность для $a'=a$, будем иметь

$$\frac{\partial U_n}{\partial a}=\int_0^A \rho'\,\frac{\partial(R_n+S_n)}{\partial a}\,da',$$

что можно переписать еще так [8]:

$$\frac{\partial U_n}{\partial a}=\frac{4\pi}{a^2}(-\zeta)^{n-1}\left(\zeta-na\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)\int_0^a \rho a^2\,da+\int_0^A \rho'\frac{\partial^2 T_n}{\partial a\,\partial a'}\,da', \tag{9}$$

где, под знаком интеграла, случай $a'=a$ должен быть рассматриваем как предельный.

4

Предположим, как это будет иметь место в рассматриваемой задаче, что ζ выражается рядом, расположенным по степеням введенного выше параметра $\varkappa$, так что имеем

$$\zeta = \zeta_1 \varkappa + \zeta_2 \varkappa^2 + \zeta_3 \varkappa^3 + \ldots, \tag{10}$$

где ζ_i суть функции a и μ, не зависящие от $\varkappa$.

Предположим затем, что удалось получить такие положительные постоянные числа

$$\begin{gathered} l_1, \quad l_2, \quad l_3, \ldots, \\ g_1, \quad g_2, \quad g_3, \ldots, \\ h_1, \quad h_2, \quad h_3, \ldots, \end{gathered}$$

что

$$|\zeta_i| < l_i, \qquad \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial \mu^2}\right| < g_i, \qquad \left|\frac{\partial a \zeta_i}{\partial a}\right| < h_i$$

для всех значений i, принадлежащих последовательности 1, 2, 3,..., и для всех рассматриваемых значений a и μ, причем эти постоянные числа должны быть сверх того такими, чтобы ряды

$$\left.\begin{aligned} & l_1 \varkappa + l_2 \varkappa^2 + l_3 \varkappa^3 + \ldots, \\ & g_1 \varkappa + g_2 \varkappa^2 + g_3 \varkappa^3 + \ldots, \\ & h_1 \varkappa + h_2 \varkappa^2 + h_3 \varkappa^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

были сходящимися для достаточно малых $\varkappa$.

Тогда можно будет положить

$$\begin{aligned} l &= l_1 \varkappa + l_2 \varkappa^2 + l_3 \varkappa^3 + \ldots, \\ g &= g_1 \varkappa + g_2 \varkappa^2 + g_3 \varkappa^3 + \ldots, \\ h &= h_1 \varkappa + h_2 \varkappa^2 + h_3 \varkappa^3 + \ldots, \end{aligned}$$

и делая $\varkappa$ достаточно малым, можно будет сделать l, g, h малыми по желанию.

Если подставить в U_n вместо ζ его выражение (10) и вместо ζ' выражение

$$\zeta_1' \varkappa + \zeta_2' \varkappa^2 + \zeta_3' \varkappa^3 + \ldots,$$

которое выводится из ζ заменою a и μ через a' и μ', то результат подстановки можно будет разложить по степеням $\varkappa$, и, таким образом, получится ряд вида

$$U_n = U_{n,0} \varkappa^n + U_{n,1} \varkappa^{n+1} + \ldots, \tag{12}$$

абсолютно сходящийся всякий раз, когда ряды (11) сходятся.

Внося полученные таким образом разложения в формулу (7), можно будет представить U в виде ряда, расположенного по степеням $\varkappa$.

Этот ряд будет сходящимся для достаточно малых $\varkappa$; но для сходимости еще недостаточно, вообще говоря, удовлетворить неравенству

$$l^2 + g^2 + h^2 < 1,$$

которое обеспечивает лишь сходимость ряда (7). Однако же достаточно будет соблюдения неравенства

$$2(l + g + h) + l^2 + (g + h)^2 < 1. \tag{13}$$

Чтобы показать это, вернемся к формулам п. 2.

Выражение v показывает, что если разложить его по степеням $\varkappa$, полагая

$$v = v_1 \varkappa + v_2 \varkappa^2 + v_3 \varkappa^3 + \ldots$$

то получится

$$v_i = \frac{(a - a')(a\zeta_i - a'\zeta_i')}{D^2} + \frac{aa'(\zeta_i + \zeta_i')(1 - \cos\varphi)}{D^2};$$

эта формула дает

$$|v_i| < \frac{|a\zeta_i - a'\zeta_i'|}{D} + l_i,$$

так как

$$D^2 = (a - a')^2 + 2aa'(1 - \cos\varphi).$$

Но, очевидно, для ζ_i будем иметь неравенство такого же вида, как и (6), которое мы установили для ζ. Следовательно, мы будем иметь

$$\frac{|a\zeta_i - a'\zeta_i'|}{D} < \sqrt{g_i^2 + h_i^2}$$

и тем более

$$\frac{|a\zeta_i - a'\zeta_i'|}{D} < g_i + h_i.$$

Итак, получается

$$|v_i| < l_i + g_i + h_i,$$

и это показывает, что $|v_i|$ меньше, чем коэффициент при $\varkappa^i$ в разложении

$$l + g + h.$$

Точно так же, формула

$$w = \frac{(a\zeta - a'\zeta')^2}{D^2} + \frac{2aa'\zeta\zeta'(1 - \cos\varphi)}{D^2}$$

показывает, что, если положить

$$w = w_2\varkappa^2 + w_3\varkappa^3 + \ldots,$$

то $|w_i|$ будет меньше коэффициента при $\varkappa^i$ в разложении

$$(g + h)^2 + l^2.$$

Отсюда можно заключить, что, при условии (13), выражение

$$(1 + 2v + w)^{-\frac{\mu}{2}}$$

будет разложимо по степеням $\varkappa$ в ряд, абсолютно и равномерно сходящийся для всех рассматриваемых значений

a, a', θ, θ', φ; отсюда немедленно вытекает сходимость разложения U, о котором идет речь

Изо всего, что мы показали, следует, что все трудности будут устранены, если удастся определить три последовательности чисел

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\dots,$$
$$g_1,\ g_2,\ g_3,\dots,$$
$$h_1,\ h_2,\ h_3,\dots,$$

удовлетворяющие указанным выше условиям. Но прежде, нежели указывать результат, который мы получили в этом направлении, покажем, как наши формулы приводят к известным уравнениям, от которых зависит определение функции ζ_1, ζ_2, ζ_3, и т. д.

5

Принимая для ζ выражение (10), постараемся удовлетворить уравнениям (2) и (3) независимо от величины $\varkappa$.

Что касается уравнения (2), которое может быть представлено в виде

$$\int \zeta\, d\sigma = -\int \left(\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3\right) d\sigma,$$

то из него выводятся следующие уравнения:

$$\int \zeta_1\, d\sigma = 0, \tag{14}$$

$$\int \zeta_2\, d\sigma = -\int \zeta_1^2\, d\sigma,$$

и вообще

$$\int \zeta_n\, d\sigma = -\text{коэфф. при } \varkappa^n \text{ в выраж. } \int \left(\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3\right) d\sigma, \tag{15}$$

где вторая часть зависит только от функций

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\dots,\ \zeta_{n-1}.$$

Переходя затем к уравнению (3), мы должны начать с разложения U по степеням $\varkappa$.

Обратимся к формуле (7).

Мы видели, что U_0 зависит лишь от a. Следовательно, мы можем оставить его в стороне.

Что же касается U_1, то формула (8) дает

$$U_1 = -\frac{4\pi}{a}\zeta\int_0^a \rho a^2\,da + \int_0^A \rho'\,da'\,\frac{\partial}{\partial a'}\int\frac{a'^3\zeta'}{D}\,d\sigma'.$$

Следовательно, если для краткости положить

$$\zeta_n\int_0^a \rho a^2\,da - \frac{a}{4\pi}\int_0^A \rho'\,da'\,\frac{\partial}{\partial a'}\int\frac{a'^3\zeta_n'}{D}\,d\sigma' = Z_n,$$

то получится

$$\frac{a}{4\pi}U_1 = -Z_1\varkappa - Z_2\varkappa^2 - Z_3\varkappa^3 - \ldots$$

Что же касается других членов формулы (7), то мы положим

$$U - U_1 - U_0 = \frac{4\pi}{a}(V_2\varkappa^2 + V_3\varkappa^3 + \ldots),$$

так что будем иметь, в силу (12),

$$\frac{4\pi}{a}V_n = U_{n,0} + U_{n-1,1} + \ldots + U_{2,n-2}. \tag{16}$$

Таким путем мы получим следующее разложение:

$$\frac{a}{4\pi}U = -Z_1\varkappa + (V_2 - Z_2)\varkappa^2 + (V_3 - Z_3)\varkappa^3 + \ldots + \text{функция } a.$$

Разложим затем функцию $(1+\zeta)^2$ по степеням $\varkappa$ и положим

$$\varkappa(1+\zeta)^2\sin^2\theta = \Omega_1\varkappa + \Omega_2\varkappa^2 + \ldots,$$

так что получится

$$\Omega_1 = \sin^2\theta,$$
$$\Omega_2 = 2\zeta_1 \sin^2\theta,$$
$$\Omega_3 = (\zeta_1^2 + 2\zeta_2)\sin^2\theta,$$

и т. д.

В силу этих формул, уравнение (3) примет вид

$$-Z_1\varkappa + (V_2 - Z_2)\varkappa^2 + (V_3 - Z_3)\varkappa^3 + \ldots +$$
$$+ Na^3(\Omega_1\varkappa + \Omega_2\varkappa^2 + \Omega_3\varkappa^3 + \ldots) = \text{функции } a,$$

где N есть постоянное число, равное

$$N = \frac{M}{8\pi A^3} = \frac{1}{2A^3}\int_0^A \rho a^2\, da;$$

чтобы удовлетворить этому уравнению независимо от $\varkappa$, положим

$$Z_1 = Na^3\,\Omega_1 + \text{функция } a,$$
$$Z_2 = Na^3\,\Omega_2 + V_2 + \text{функция } a$$

и, вообще,

$$Z_n = Na^3\,\Omega_n + V_n + \text{функция } a. \qquad (17)$$

Эти уравнения и будут служить для последовательного определения $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ и функций переменного a, находящихся во вторых частях.

Чтобы получить из этих уравнений функции $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$, которые только нас и интересуют, поступим так.

Пусть [9]

$$Y_m(\theta, \psi) = Y_m$$

будет какой-нибудь сферической функцией порядка m.

Если число m отлично от нуля, то уравнение (17) даст

$$\int Z_n Y_m\, d\sigma = Na^3 \int \Omega_n Y_m\, d\sigma + \int V_n Y_m\, d\sigma,$$

где интеграции распространены на всю сферу радиуса 1.

Но, полагая

$$\int \zeta_n Y_m \, d\sigma = z,$$

имеем

$$\int Z_n Y_m \, d\sigma = z \int_0^a \rho a^2 \, da - \frac{a}{4\pi} \int_0^A \rho' \, da' \frac{\partial}{\partial a'} \int a'^3 \zeta_n' \, d\sigma' \int \frac{Y_m}{D} \, d\sigma,$$

и, с другой стороны, известно, что интеграл [10]

$$\int \frac{Y_m(\theta, \psi)}{D} \, d\sigma$$

равен: для $a' < a$,

$$\frac{4\pi}{2m+1} \frac{a'^m}{a^{m+1}} Y_m(\theta', \psi')$$

и, для $a' > a$,

$$\frac{4\pi}{2m+1} \frac{a^m}{a'^{m+1}} Y_m(\theta', \psi').$$

Итак, получается

$$\int Z_n Y_m \, d\sigma = z \int_0^a \rho a^2 \, da - \frac{a^{-m}}{2m+1} \int_0^a \rho \frac{d(a^{m+3} z)}{da} \, da -$$

$$- \frac{a^{m+1}}{2m+1} \int_a^A \rho \frac{d(a^{2-m} z)}{da} \, da,$$

и, полагая

$$W = N \int \Omega_n Y_m \, d\sigma + \frac{1}{a^3} \int V_n Y_m \, d\sigma,$$

мы получаем следующее уравнение:

$$z \int_0^a \rho a^2 \, da - \frac{a^{-m}}{2m+1} \int_0^a \rho \frac{d(a^{m+3} z)}{da} \, da - \qquad (18)$$

$$- \frac{a^{m+1}}{2m+1} \int_a^A \rho \frac{d(a^{2-m} z)}{da} \, da = W a^3.$$

Если условимся считать $V_1 = 0$, то мы можем придавать здесь n все значения, начиная с $n = 1$.

Для этого последнего значения n вторая часть уравнения (18) будет известной функцией a, и то же самое будет для $n > 1$, если уже известны функции

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1},$$

так как только от этих $n - 1$ функций будут зависеть Ω_n и V_n.

Итак, если функции $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ уже определены и если известно, как решать уравнение (18), то можно вычислить значение интеграла

$$\int \zeta_n Y_m \, d\sigma \tag{19}$$

для m, отличного от нуля.

Что же касается $m = 0$, то уравнение (18) не будет уже иметь места. Но в этом случае указанный интеграл приводится к интегралу

$$\int \zeta_n \, d\sigma,$$

умноженному на постоянное число, и его значение будет вычисляться по формуле (15).

Итак, значение интеграла (19) будет известно для каждой сферической функции Y_m.

Если, следовательно, ζ_n может быть разложена в ряд по сферическим функциям, то коэффициенты этого разложения известны; и мы вскоре увидим, что это разложение содержит лишь ограниченное число членов.

Таким путем вычисляются последовательно $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$

6

Рассмотрим внимательно уравнение (18).

Предположим сначала, что $n = 1$.

В этом случае мы будем иметь

$$W = N \int Y_m \sin^2\theta \, d\sigma,$$

и, так как

$$\sin^2\theta = \frac{2}{3}[1 - P_2(\cos\theta)],$$

где $P_2(\cos\theta)$ есть полином Лежандра второго порядка от аргумента $\cos\theta$, то W будет равно нулю всякий раз, как, при m отличном от нуля, функция Y_m не приводится к $P_2(\cos\theta)$, умноженному на постоянное число. Кроме того, для

$$Y_m = P_2(\cos\theta)$$

получается

$$W = -\frac{8\pi}{15} N = -\frac{M}{15A^3}.$$

Итак, в этом последнем случае, уравнение (18) приводится к такому виду

$$z\int_0^a \rho a^2\,da - \frac{a^{-2}}{5}\int_0^a \rho\,\frac{da^5 z}{da}\,da - \frac{a^3}{5}\int_a^A \rho\,\frac{dz}{da}\,da = -\frac{M}{15A^3}a^3, \tag{20}$$

и, во всех других случаях, оно будет

$$\begin{aligned} z\int_0^a \rho a^2\,da - \frac{a^{-m}}{2m+1}\int_0^a \rho\,\frac{da^{m+3} z}{da}\,da - \\ -\frac{a^{m+1}}{2m+1}\int_a^A \rho\,\frac{da^{2-m} z}{da}\,da = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнение (20), которое, с точностью до постоянного множителя в правой части, есть не что иное, как уравнение Клэро, было предметом многочисленных изысканий, из которых известно, что, при некоторых условиях, оно допускает

решение z, непрерывное вместе с производной $\frac{daz}{da}$ для всех значений a в интервале $(0, A)$, и что, сверх того, оно имеет лишь одно решение, подчиненное условию быть конечным при $a=0$.

В этих исследованиях предполагают, что ρ есть убывающая функция a. Но, кроме того, делают еще допущения и об аналитической форме этой функции.

Я нашел, что эти последние предположения излишни и что существование решения уравнения (20) можно установить, предполагая лишь, что ρ постоянно убывает, когда a растет, и остается конечным при $a=0$. Этого предположения вполне достаточно, чтобы установить, что рассматриваемое уравнение может иметь только одно решение, а также и для представления этого решения некоторым рядом.

Добавлю, что в этом решении z будет повсюду непрерывным, в то время как производная $\frac{dz}{da}$ будет также непрерывна, за исключением, может быть, $a=0$, когда она может обращаться в бесконечность, но таким образом, чтобы $a\frac{dz}{da}$ стремилось к нулю при $a=0$.

В этом же самом предположении относительно ρ можно также установить, что уравнение (21), для $m>1$, может быть удовлетворено лишь если положить $z=0$.

Что же касается случая $m=1$, то этому уравнению, очевидно, удовлетворим, полагая

$$z=\frac{C}{a},$$

где C есть произвольная постоянная, и можно установить, что эта формула охватывает все его решения. Таким образом, если предположить, что az должно стремиться к нулю при $a=0$, то и для $m=1$ получим также $z=0$.

Мы не будем здесь останавливаться на доказательстве этих результатов, которые мы предполагаем изложить в другом мемуаре [11]. Теперь же мы ограничимся лишь указанием следствий, которые из них вытекают в отношении ζ_1.

Мы видим, что если предположить, что $a\zeta_1$ стремится к нулю при $a=0$, то

$$\int \zeta_1 Y_m d\sigma = 0$$

всякий раз, как, при m отличном от нуля, функция Y_m не приводится к $P_2(\cos\theta)$, умноженному на постоянное число, и этот результат, в силу равенства (14), будет иметь место и при $m=0$.

Отсюда следует, что уравнениям для функции ζ_1 можно удовлетворить, полагая

$$\zeta_1 = \gamma P_2(\cos\theta),$$

где γ есть вполне определенная функция a, непрерывная вместе с производной $\frac{da\gamma}{da}$, для всех значений a в интервале $(0, A)$.

Больше того: нет никакого другого решения, если предположить только, что ζ_1, как функция сферических координат, непрерывна на поверхности сферы радиуса 1.

В самом деле, если бы существовало еще и другое непрерывное решение (мы предполагаем его вещественным), то разность между этим решением и предыдущим представляла бы некоторую непрерывную функцию $F(\theta, \psi)$, для которой

$$\int F Y_m d\sigma = 0, \tag{22}$$

какова бы ни была сферическая функция Y_m.

Но, для всякой непрерывной функции $F(\theta, \psi)$, имеющей вполне определенное значение в каждой точке поверхности сферы, имеем[1]

$$\int F^2 d\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^2,$$

где

$$Q_m = \frac{2m+1}{4\pi} \int F(\theta', \psi') P_m(\cos\varphi)\, d\sigma',$$

где $P_m(\cos\varphi)$ есть полином Лежандра порядка m от аргумента

$$\cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi').$$

Но, в силу (22), так как все Q_m равны нулю, имеем

$$\int F^2 d\sigma = 0,$$

и это показывает, что непрерывная функция F может быть лишь тождественным нулем [12].

7

Рассмотрим теперь случай $n > 1$.

Предположим, что

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$$

уже вычислены и что для этих функций получены выражения вида

$$\zeta_i = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} P_2(\cos\theta) + \gamma_{i,2} P_4(\cos\theta) + \ldots + \gamma_{i,i} P_{2i}(\cos\theta),$$

[1] Можно заметить, что эта формула пригодна и в более общем случае, когда предполагают только, что F есть функция, *интегрируемая* на поверхности сферы. Я установил это предложение семь лет тому назад, но не опубликовал его, ограничившись сообщением его Харьковскому математическому обществу. После этого В. А. Стеклов широко обобщил это предложение, рассматривая вместо сферических функций аналогичные функции, появляющиеся при общих исследованиях задач математической физики.

где все γ суть функции a, непрерывные вместе с производными

$$\frac{da\,\gamma_{i,0}}{da},\quad \frac{da\,\gamma_{i,1}}{da},\ \ldots,\ \frac{da\,\gamma_{i,i}}{da}$$

для всех значений a в интервале $(0, A)$.

Рассмотрим, во что обратится W в уравнении (18).

Легко видеть с самого начала, что Ω_n и V_n будут целыми функциями от $\cos^2\theta$, степень которых не превышает n.

Что касается Ω_n, то это свойство немедленно вытекает из равенства

$$(1+\zeta_1\varkappa+\zeta_2\varkappa^2+\ldots)^2\sin^2\theta=\Omega_1+\Omega_2\varkappa+\Omega_3\varkappa^2+\ldots,$$

если принять в расчет данные выше выражения ζ_i.

Что же касается V_n, заметим, что, в силу формулы (16), это есть коэффициент при $\varkappa^n$ в разложении выражения

$$\frac{a}{4\pi}(U_2+U_3+\ldots),$$

которое, в силу формулы (8), может быть представлено в виде

$$\frac{\zeta^2}{1+\zeta}\int\limits_0^a \rho a^2\,da+\frac{a}{4\pi}\int\limits_0^A \rho'\left(\frac{\partial T_2}{\partial a'}+\frac{\partial T_3}{\partial a'}+\ldots\right)da'.$$

Но коэффициент при $\varkappa^n$ в разложении

$$\frac{\zeta^2}{1+\zeta}$$

будет, очевидно, целой функцией $\cos^2\theta$, степень которой, самое большее, равна n; и можно доказать, что то же самое обстоятельство имеет место и для $T_2, T_3, \ldots$.

Действительно, из выражения T_n, данного в п. 3, видно, что для доказательства этого достаточно рассмотреть такие выражения, как

$$\zeta^i\int\frac{\zeta'^{j+1}\,d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}},\qquad (23)$$

где i и j суть целые положительные числа или нули, причем сумма $i+j$ не меньше единицы.

Но коэффициент при $\varkappa^n$ в этом выражении будет суммой членов вида

$$C\zeta_1^{\alpha}\zeta_2^{\beta}\ldots\zeta_{n-1}^{\delta}\int\frac{(\zeta_1')^{\alpha'}(\zeta_2')^{\beta'}\ldots(\zeta_{n-1}')^{\delta'}\,d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}, \tag{24}$$

где C есть постоянное, а $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \alpha', \beta', \ldots, \delta'$ — целые положительные числа или нули, удовлетворяющие равенству

$$\alpha+\alpha'+2(\beta+\beta')+\ldots+(n-1)(\delta+\delta')=n.$$

С другой стороны, если положить

$$\alpha+2\beta+\ldots+(n-1)\delta=s,$$
$$\alpha'+2\beta'+\ldots+(n-1)\delta'=s',$$

то произведение

$$\zeta_1^{\alpha}\zeta_2^{\beta}\ldots\zeta_{n-1}^{\delta}$$

будет целой функцией $\cos^2\theta$, степень которой, самое большее, равна s, и

$$\zeta_1'^{\alpha'}\zeta_2'^{\beta'}\ldots\zeta_{n-1}'^{\delta'}$$

будет целой функцией $\cos^2\theta'$ степени, не большей, чем s'.

Известно, кроме того, что если $f(x)$ есть целая функция x, то интеграл

$$\int\frac{f(\cos^2\theta')\,d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}$$

будет целой функцией $\cos^2\theta$ той же степени.

Итак, выражение (24) будет целой функцией $\cos^2\theta$ степени, не большей, чем

$$s+s'=n,$$

и коэффициент при x^n в разложении выражения (23) будет обладать, следовательно, этим же самым свойством.

Из этого вытекает, как мы и утверждали, что коэффициент при x^n в T_2, T_3, ... и, следовательно, V_n будут целыми функциями $\cos^2\theta$ степени, не большей, чем n.

Отсюда формула

$$W = N\int \Omega_n Y_n\,d\sigma + \frac{1}{a^3}\int V_n Y_m\,d\sigma$$

показывает, что W будет равно нулю всякий раз, как Y_m при m, отличном от нуля, не приводится к одной из функций

$$P_2(\cos\theta),\quad P_4(\cos\theta),\ \ldots,\quad P_{2n}(\cos\theta),$$

умноженной на постоянную величину.

Следовательно, на основании сказанного в предыдущем параграфе, если предположить, что $a\zeta_n$ должно стремиться к нулю при $a = 0$, то будем иметь

$$\int \zeta_n Y_m\,d\sigma = 0$$

каждый раз, как, при m отличном от нуля, Y_m не приводится к указанному только что виду.

Предположим, следовательно, что $Y_m = P_m(\cos\theta)$, где m есть четное число, не превосходящее $2n$.

Итак, теперь следует рассмотреть интеграл

$$\int \zeta_n P_m(\cos\theta)\,d\sigma, \tag{25}$$

значение которого для $m = 0$ будет даваться непосредственно формулой (15), а для $m > 0$ должно быть выведено из уравнения (18), в котором W будет известной функцией a.

Что касается этой функции, то можно установить, и это мы сделаем в следующем параграфе, что при принятых условиях сама эта функция, а равно и производная $\frac{daW}{da}$,

будут непрерывными для всех значений a в интервале $(0, A)$.

Но, при указанном условии, можно показать, и это мы откладываем до другого мемуара [13], что уравнение (18) допускает решение, для которого z и $\frac{daz}{da}$ будут непрерывными для всех значений a в интервале $(0, A)$. Это решение будет, кроме того, единственным, как это следует из сказанного в предыдущем параграфе об уравнении (21).

Итак, значение интеграла (25) будет полностью определено для всех значений m.

Из этого видно, что уравнениям (15) и (17) возможно удовлетворить, полагая

$$\zeta_n = \gamma_{n,0} + \gamma_{n,1} P_2(\cos\theta) + \gamma_{n,2} P_4(\cos\theta) + \ldots + \gamma_{n,n} P_{2n}(\cos\theta),$$

где γ суть функции a, и эти функции не содержат какого-либо произвола и непрерывны, вместе с производными

$$\frac{da\gamma_{n,0}}{da}, \frac{da\gamma_{n,1}}{da}, \ldots, \frac{da\gamma_{n,n}}{da}$$

во всем интервале $(0, A)$.

Кроме того, на основании доказанного выше, эта формула будет давать единственно возможное решение, если предположить, что ζ_n, как функция сферических координат, должна быть непрерывной.

Таким образом, мы приходим для ζ_n к выражению того же вида, какой был принят для

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}.$$

Но ζ_1 имеет этот вид, и, следовательно, ζ_n будет того же вида для всех значений n, и функции $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ будут полностью определены, если их подчинить только следующим двум условиям: 1) $a\zeta_1, a\zeta_2, \ldots$ стремятся к нулю при $a = 0$ и 2) это суть непрерывные функции сферических координат.

Если ряд (10) должен быть равномерно сходящимся во всей массе жидкости, то нет необходимости говорить о пер-

вом из этих двух условий, что же касается второго — оно приводится к тому, что ζ должно быть непрерывной функцией сферических координат для всех достаточно малых значений параметра $\varkappa$.

8

Принимая по отношению к функциям

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$$

допущения, указанные в предыдущем параграфе, мы покажем теперь, что W и $\frac{daW}{da}$ будут, как мы и утверждали, непрерывными функциями a во всем интервале $(0, A)$.

Мы имеем

$$W = N\int \Omega_n Y_m d\sigma + \frac{1}{a^3}\int V_n Y_m d\sigma,$$

и первый член этой формулы обладает, очевидно, тем свойством, которое мы хотим установить для W. Остается, следовательно, рассмотреть второй член.

Но, на основании того, что мы видели в предыдущем параграфе, количество

$$\frac{1}{a^3}\int V_n Y_m d\sigma,$$

которое мы будем обозначать через W_1, есть коэффициент при $\varkappa^n$ в разложении выражения

$$\frac{1}{a^3}\int_0^a \rho a^2 da \cdot \int \frac{\zeta^2}{1+\zeta} Y_m d\sigma + \int_0^A \rho' \left(\frac{\partial J_2}{\partial a'} + \frac{\partial J_3}{\partial a'} + \ldots\right) da',$$

где

$$J_k = \frac{1}{4\pi a^2}\int T_k Y_m d\sigma.$$

Что же касается производной $\frac{daW_1}{da}$, то

$$\frac{daW_1}{da} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{V_n}{a}\right) Y_m d\sigma - W_1,$$

и первый член есть коэффициент при $\varkappa^n$ в разложении

$$\frac{1}{4\pi a}\int\left(\frac{\partial U_2}{\partial a} + \frac{\partial U_3}{\partial a} + \ldots\right) Y_m d\sigma,$$

или, в силу формулы (9), коэффициент при $\varkappa^n$ в разложении:

$$\frac{1}{a^3}\int_0^a \rho a^2 da \cdot \int\left(a\frac{\partial}{\partial a}\frac{\zeta^2}{1+\zeta} - \frac{\zeta^2}{1+\zeta}\right) Y_m d\sigma +$$

$$+ 2\int_0^A \rho'\left(\frac{\partial J_2}{\partial a'} + \frac{\partial J_3}{\partial a'} + \ldots\right) da' + a\int_0^A \rho'\left(\frac{\partial^2 J_2}{\partial a \partial a'} + \frac{\partial^2 J_3}{\partial a \partial a'} + \ldots\right) da'.$$

Таким образом, мы приходим к рассмотрению коэффициента при $\varkappa^n$ в разложении выражений

$$\frac{1}{a^3}\int_0^a \rho a^2 da \int \frac{\zeta^2}{1+\zeta} Y_m d\sigma; \quad \frac{1}{a^3}\int_0^a \rho a^2 da \cdot \int a\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\zeta^2}{1+\zeta}\right) Y_m d\sigma;$$

$$\int_0^A \rho'\frac{\partial J_k}{\partial a'} da'; \quad a\int_0^A \rho'\frac{\partial^2 J_k}{\partial a \partial a'} da'.$$

Но для двух первых — этот коэффициент есть, очевидно, непрерывная функция a, ибо ρ предполагается конечным для $a = 0$. Что же касается двух последних, — их следует рассмотреть детальнее.

Заметим сначала, что рассматриваемый коэффициент не изменится, если при оценке J_k (здесь следует считать $k > 1$), вместо точного выражения ζ в виде бесконечного ряда, пользоваться следующим его приближенным выражением

$$\zeta = \zeta_1 \varkappa + \zeta_2 \varkappa^2 + \ldots + \zeta_{n-1}\varkappa^{n-1}.$$

Предположим, что ζ дается этой формулой.

Тогда каждая целая и положительная степень ζ будет выражаться конечным рядом полиномов Лежандра четного порядка.

Пусть, при i целом и положительном, будет

$$\zeta^i = \sum_{(s)} \frac{4s+1}{4\pi} p_{i,s} P_{2s}(\cos\theta),$$

где, как известно,

$$p_{i,s} = \int \zeta^i P_{2s}(\cos\theta)\, d\sigma$$

и где сумма содержит лишь ограниченное число членов.

Приняв это, вернемся к выражению T_n, данному в п. 3.

Если через $p'_{i,s}$ обозначить результат замены a на $a^{r'}$ в выражении $p_{i,s}$, то получим

$$\int \frac{\zeta'^{j+1} b^2\, d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}} = \sum_{(s)} \frac{4s+1}{4\pi} p'_{j+1,s} \int \frac{P_{2s}(\cos\theta')\, b^2\, d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}},$$

и известно [10], что интеграл

$$\int \frac{P_{2s}(\cos\theta')\, b^2\, d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}$$

равен: для $b<a$

$$\frac{4\pi}{4s+1} \frac{b^{2s+2}}{a^{2s+1}} P_{2s}(\cos\theta)$$

и для $b>a$

$$\frac{4\pi}{4s+1} \frac{a^{2s}}{b^{2s-1}} P_{2s}(\cos\theta).$$

Следовательно, выражение

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial a^i\, \partial b^j} \int \frac{\zeta'^{j+1} b^2\, d\sigma'}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}$$

будет равно: для $b < a$

$$\sum_{(s)} p'_{j+1,s} P_{2s}(\cos\theta) \frac{d^i a^{-2s-1}}{da^i} \frac{d^j b^{2s+2}}{db^j},$$

и для $b > a$

$$\sum_{(s)} p'_{j+1,s} P_{2s}(\cos\theta) \frac{d^i a^{2s}}{da^i} \frac{d^j b^{-2s+1}}{db^j}.$$

Отсюда, замечая, что каждое выражение вида

$$x^{i-\alpha} \frac{d^i x^\alpha}{dx^i}$$

представляет собой число, не зависящее от x, и полагая, для краткости,

$$x^{i+j} \frac{\quad}{dx^i} \frac{{}^{j} x^{1-\alpha}}{dx^j} = (i, j, \alpha),$$

мы будем иметь: для $a' < a$

$$T_k = a^2 \sum \sum_{(s)} \frac{(i, j, -2s-1)}{i!\,(j+1)!} \zeta^i P_{2s}(\cos\theta)\, p'_{j+1,s} \left(\frac{a'}{a}\right)^{2s+3}$$

и для $a' > a$

$$T_k = a^2 \sum \sum_{(s)} \frac{(i, j, 2s)}{i!\,(j+1)!} \zeta^i P_{2s}(\cos\theta)\, p'_{j+1,s} \left(\frac{a}{a'}\right)^{2s-2},$$

где новое суммирование распространяется на все значения, положительные или нули, целых чисел i и j, удовлетворяющие равенству $i + j = k - 1$.

Отсюда, с помощью формулы

$$J_k = \frac{1}{4\pi a^2} \int T_k Y_m \, d\sigma,$$

находим J_k и, полагая

$$\frac{1}{4\pi} \int \zeta^i P_{2s}(\cos\theta) Y_m \, d\sigma = q_{i,s},$$

получим для интеграла

$$\int_0^A \rho' \frac{\partial J_k}{\partial a'} da',$$

такое выражение

$$\sum\sum_{(s)} \frac{(i, j, -2s-1)}{i!\,(j+1)!} q_{i,s} a^{-2s-3} \int_0^a \rho \frac{d a^{2s+3} p_{j+1,s}}{da} da +$$

$$+ \sum\sum_{(s)} \frac{(i, j, 2s)}{i!\,(j+1)!} q_{i,s} a^{2s-2} \int_a^A \rho \frac{d a^{2-2s} p_{j+1,s}}{da} da.$$

Совершенно так же для интеграла

$$a \int_0^A \rho' \frac{\partial^2 J_k}{\partial a \partial a'} da'$$

будем иметь

$$\sum\sum_{(s)} \frac{(i, j, -2s-1)}{i!\,(j+1)!} a \frac{d a^{-2s-3} q_{i,s}}{da} \int_0^a \rho \frac{d a^{2s+3} p_{j+1,s}}{da} da +$$

$$+ \sum\sum_{(s)} \frac{(i, j, 2s)}{i!\,(j+1)!} a \frac{d a^{2s-2} q_{i,s}}{da} \int_a^A \rho \frac{d a^{2-2s} p_{j+1,s}}{da} da.$$

Из этих формул сразу видно, что рассматриваемые интегралы, как и коэффициенты их разложений по степеням $\varkappa$, — непрерывны при a, отличном от нуля. Кроме того видно, что члены первой строки, в каждой из двух формул, стремятся к определенным пределам при $a=0$, и что это же самое имеет место и для членов второй строки, соответствующих $s>1$.

Остается, следовательно, рассмотреть в каждой из этих формул только те члены второй строки, для которых $s=0$ или $s=1$.

Но, для $s=0$, число $(i, j, 2s)$ обращается в нуль, когда i отлично от нуля, и, если одновременно $s=0$ и $i=0$, то количество $q_{i,s}$ обращается в нуль, ибо

$$q_{0,0}=\frac{1}{4\pi}\int Y_m\,d\sigma,$$

и число m предполагается отличным от нуля.

Следовательно, вторая строка не содержит членов, отвечающих $s=0$.

Что же касается членов, для которых $s=1$, то видно, что они стремятся при $a=0$ к определенным пределам всякий раз, как это имеет место для интегралов вида

$$\int\limits_a^A \rho\,\frac{dp_{j+1,1}}{da}\,da.$$

Но легко убедиться, что этот интеграл будет иметь предел при $a=0$, если ρ, как мы это и предполагаем, есть убывающая функция a, допускающая в интервале $(0, A)$ верхний предел.

В самом деле, положим

$$\rho=\varphi(a), \qquad p_{j+1,1}=f(a)$$

и обозначим: через a_1 какое-нибудь число интервала (a, A), отличное от a, и через α некоторое число, промежуточное между a и a_1. Тогда, согласно известной теореме, для монотонной функции $\varphi(a)$ будем иметь

$$\int\limits_a^{a_1}\varphi(a)f'(a)\,da=\varphi(a+0)\ f(\alpha)-f(a)]+\varphi(a_1-0)[f(a_1)-f(\alpha)],$$

где $\varphi(a+0)$ и $\varphi(a_1-0)$ обозначают, как обычно, пределы, к которым стремится функция $\varphi(x)$, когда x, оставаясь в интервале (a, a_1), стремится к a или к a_1.[1]

[1] Существование этих пределов обеспечено предположением, что функция $\varphi(x)$ все время изменяется в одну сторону.

Отсюда следует, в силу непрерывности функции $f(a)$ в интервале $(0, A)$ и наличия верхнего предела у $\varphi(a+0)$ и $\varphi(a_1-0)$, что для каждого положительного числа η, как бы мало оно ни было, можно указать положительное число ε такое, что

$$\left|\int_a^{a_1} \varphi(a) f'(a) da\right| < \eta,$$

при любом малом a, как только будет $a < a_1 < \varepsilon$; это доказывает наше утверждение.

Итак, видно, что W и $\frac{daW}{da}$, оставаясь непрерывными при $a > 0$, стремятся, при $a = 0$, к определенным пределам. Это и нужно было установить.

9

Изложим теперь результаты, которые мы получили при рассмотрении сходимости рядов [14]

$$\zeta_1 \varkappa + \zeta_2 \varkappa^2 + \zeta_3 \varkappa^3 + \ldots,$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial a} \varkappa + \frac{\partial \zeta_2}{\partial a} \varkappa^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \varkappa^3 + \ldots,$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} \varkappa + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \mu} \varkappa^2 + \frac{\partial \zeta_3}{\partial \mu} \varkappa^3 + \ldots.$$

Обозначая для краткости

$$g + h = \lambda$$

и полагая

$$F(l, g, h) = \frac{(1+l)^3 (1+l+g)\left(1+l+\frac{4}{5}g\right)}{(1-2l-2\lambda-l^2-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 - 8l - 3\lambda - \frac{9}{5}g,$$

$$\Phi(l, g, h) = \frac{(1+l)^3 (1+h)\left(1+l+\frac{4}{5}g\right)}{(1-2l-2\lambda-l^2-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 - 7l - 3\lambda -$$

$$-\frac{4}{5}g - h,$$

мы будем понимать под l, g, h функции $\varkappa$, определенные алгебраическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{5}{6}(1+l)(1+l+2g)\varkappa + l^2 + \frac{1}{3}l^3 + \frac{5}{3}F(l, g, h), \\ g &= \frac{3}{2}\left(l - l^2 - \frac{1}{3}l^3\right), \\ h &= \frac{10}{3}g - \frac{17}{6}\varkappa + 2(l+h+lh)\varkappa + (2+l)lh + 2\Phi(l, g, h), \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

с условием обращения в нуль при $\varkappa = 0$.

Если принять в расчет, что разложения функций F и Φ по возрастающим степеням l, g, h начинаются с членов второго измерения, то непосредственно приходим к заключению, что функции l, g, h, определенные указанным образом, будут разлагаться по степеням $\varkappa$, пока $\varkappa$ не превосходит некоторого предела.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} l &= l_1\varkappa + l_2\varkappa^2 + l_3\varkappa^3 + \ldots, \\ g &= g_1\varkappa + g_2\varkappa^2 + g_3\varkappa^3 + \ldots, \\ h &= h_1\varkappa + h_2\varkappa^2 + h_3\varkappa^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

будут эти разложения.

Тогда все l_i, g_i, h_i будут положительными, и мы будем иметь

$$|\zeta_i| < l_i, \qquad \left|\frac{\partial a\zeta_i}{\partial a}\right| < h_i, \qquad \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial \mu^2}\right| < g_i,$$

при любом i, для всех значений a в интервале $(0, A)$ и для всех значений μ^2 в интервале $(0, 1)$ *и эти неравенства будут иметь место какова бы ни была убывающая функция a, которой представляется плотность* ρ.

Итак, всякий раз, как ряды (27) сходятся, ряды

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_1\varkappa + \zeta_2\varkappa^2 + \zeta_3\varkappa^3 + \ldots, \\ &\frac{\partial a\zeta_1}{\partial a}\varkappa + \frac{\partial a\zeta_2}{\partial a}\varkappa^2 + \frac{\partial a\zeta_3}{\partial a}\varkappa^3 + \ldots, \\ &\frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu^2}\varkappa + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \mu^2}\varkappa^2 + \frac{\partial \zeta_3}{\partial \mu^2}\varkappa^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

будут абсолютно и равномерно сходиться во всей массе жидкости, и мы будем иметь

$$\zeta = \zeta_1 \varkappa + \zeta_2 \varkappa^2 + \zeta_3 \varkappa^3 + \ldots,$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial a} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial a} \varkappa + \frac{\partial \zeta_2}{\partial a} \varkappa^2 + \frac{\partial \zeta_3}{\partial a} \varkappa^3 + \ldots,$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \mu} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} \varkappa + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \mu} \varkappa^2 + \frac{\partial \zeta_3}{\partial \mu} \varkappa^3 + \ldots$$

Что касается верхнего предела значений $\varkappa$, для которых ряды (27) будут сходящимися, то он равен наименьшему положительному корню некоторого алгебраического уравнения в $\varkappa$, которое можно составить следующим образом.

Перенесем в уравнениях (26) все члены в левую часть. Затем, обозначая эти уравнения

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

образуем из трех функций f, φ, ψ функциональный определитель по отношению к l, g, h. Приравнивая этот определитель нулю, получим новое уравнение, и исключение l, g, h из четырех уравнений, так полученных, приведет к искомому уравнению в $\varkappa$.

Если через $\varkappa_0$ обозначить наименьший положительный корень этого уравнения, то ряды (27) будут сходиться, если $\varkappa \leqslant \varkappa_0$, и не будут сходиться, если $\varkappa > \varkappa_0$.

Что же касается рядов (28), они будут, без сомнения, сходящимися для значений $\varkappa$ гораздо бо́льших, чем $\varkappa_0$, и можно только утверждать, что они не будут сохранять сходимости для произвольно больших $\varkappa$.

10

Чтобы составить представление о том, что можно извлечь из предыдущего результата для небесной механики, мы будем искать для числа $\varkappa_0$ верхний и нижний пределы, не заботясь, однако, о точности, которая была бы здесь и бесполезной.

Чтобы определить верхний предел $\varkappa_0$, будем поступать так.

Возьмем первое из уравнений (26) и устраним в нем все члены, имеющие по отношению к l, g, h, $\varkappa$ порядок более высокий, чем второй. Затем, в уравнении

$$l = \frac{5}{6}\varkappa + \frac{5}{3}(l + g)\varkappa + \frac{173}{3}l^2 + \frac{76}{3}g^2 + 15h^2 + 39gh + 50hl + 71lg,$$

к которому оно таким путем сведется, заменим g и h первыми членами их разложений

$$g = \frac{5}{4}\varkappa + \ldots; \quad h = \frac{4}{3}\varkappa + \ldots$$

Мы придем таким образом к следующему уравнению второй степени:

$$l = \frac{5}{6}\varkappa + \frac{400}{3}\varkappa^2 + \frac{5 \cdot 377}{12}\varkappa l + \frac{173}{3}l^2,$$

и если мы разложим корень этого уравнения, обращающийся в нуль при $\varkappa = 0$, в ряд по степеням $\varkappa$, то коэффициенты ряда

$$\frac{5}{6}\varkappa + l_2'\varkappa^2 + l'_3\varkappa^3 + \ldots, \tag{29}$$

таким образом полученного, которые будут все положительными, будут удовлетворять неравенствам

$$l_2' < l_2, \qquad l_3' < l_3, \ldots$$

Следовательно, ряд

$$l_1\varkappa + l_2\varkappa^2 + l_3\varkappa^3 + \ldots$$

может быть сходящимся лишь тогда, если ряд (29) сходится; что же касается этого последнего, то он может сходиться лишь в том случае, когда $\varkappa$ не превосходит единственного положительного корня уравнения

$$\left(1 - \frac{5 \cdot 377}{12}\varkappa\right)^2 - 4 \cdot \frac{173}{3}\left(\frac{5}{6}\varkappa + \frac{400}{3}\varkappa^2\right) = 0.$$

приводящегося к

$$1 - \frac{5 \cdot 1823}{12} \varkappa - \frac{25 \cdot 35023}{144} \varkappa^2 = 0.$$

Но непосредственно видно, что этот корень меньше числа

$$\frac{18}{5 \cdot 1823} < \frac{1}{500}.$$

Следовательно, с тем бóльшим правом,

$$\varkappa_0 < \frac{1}{500}.$$

Из этого видно, что результат, который мы указали, еще слишком грубый, чтобы можно было воспользоваться им в теории фигуры планет; ибо для Земли, например, имеем

$$\varkappa = \frac{1}{288},$$

и самое маленькое значение $\varkappa$, которое встречается у Меркурия, все же равно $\frac{1}{341}$.

Но можно попытаться приложить наши формулы к случаю Солнца, для которого

$$\varkappa = \frac{1}{46\,900}.$$ [1]

Это мы сейчас и сделаем.

11

Найдем нижний предел для $\varkappa_0$.

Так как уравнения (26) слишком сложны для непосредственного изучения, то мы постараемся сначала упростить

---

[1] Эти числа заимствованы из «*Traité de Mécanique Céleste*» *Tisserand'а* (см. т. II, стр. 205, где то, что мы понимаем под $\varkappa$, обозначено через φ).

их, сколько это возможно, но так, чтобы количества l_i, g_i, h_i не уменьшились.

С этой целью заметим, что, в силу третьего из уравнений (26), все коэффициенты разложения выражения

$$h - \frac{10}{3}g + \frac{17}{6}\varkappa$$

по степеням $\varkappa$ — положительны.

Следовательно, все коэффициенты разложения g меньше коэффициентов разложения

$$\frac{3}{10}h + \frac{17}{20}\varkappa.$$

С другой стороны, если заменить в первом члене второй части того же уравнения g его выражением

$$\frac{3}{2}l - \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l^3$$

и если обратить внимание на то, что все коэффициенты разложения

$$2\Phi(l, g, h) - 5l^2 - \frac{5}{3}l^3$$

по степеням l, g, h — положительны, то можно будет заключить, что все коэффициенты разложения

$$h - 5l + \frac{17}{6}\varkappa$$

по степеням $\varkappa$ — положительны.

Следовательно, все коэффициенты разложения l меньше коэффициентов разложения

$$\frac{1}{5}h + \frac{17}{30}\varkappa.$$

В силу этого, мы можем заменить уравнения (26) такими

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{5}h + \frac{17}{30}\varkappa, \\ g &= \frac{3}{10}h + \frac{17}{20}\varkappa, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

$$h = \frac{25}{6}(1+l)(1+l+2g)\varkappa - \frac{17}{6}\varkappa + 2(l+h+lh)\varkappa +$$
$$+ (2+l)\,lh + \frac{25}{3}F(l, g, h) + 2\Phi(l, g, h),$$

из которых последнее уравнение получаем, складывая почленно уравнения (26) после предварительного их умножения: первого — на 5, второго — на $\frac{10}{3}$ и третьего — на 1. Полагая

$$\Psi = \frac{25}{3}\left(l + g + lg + \frac{1}{2}l^2\right)\varkappa + 2(l + h + lh)\varkappa + (2 + l)\,lh,$$

представим это последнее уравнение так:

$$h = \frac{4}{3}\varkappa + \frac{25}{3}F + 2\Phi + \Psi. \qquad (31)$$

Подставим теперь в это уравнение, вместо l и g, их выражения (30). Мы получим тогда уравнение, которое будет содержать только h и $\varkappa$ и в котором F, Φ, Ψ, будучи разложены по степеням h и $\varkappa$, не будут содержать членов ниже второго измерения.

После этого, чтобы еще упростить нашу задачу, хотя из этого будет следовать ущерб в точности, заменим в уравнении (31) количество

$$\frac{25}{3}F + 2\Phi + \Psi \qquad (32)$$

выражением вида

$$L\left\{\frac{1}{(1-\alpha\varkappa)(1-\beta h)} - 1 - \alpha\varkappa - \beta h\right\},$$

где α, β, L суть положительные числа, выбранным так, чтобы все коэффициенты разложения этого выражения по степеням h и $\varkappa$ были больше коэффициентов разложения функции (32).

Для этого можно взять в качестве α и β любые два числа, такие, чтобы при

$$\alpha\varkappa = \beta h = 1,$$

причем l и g даются формулами (30), иметь

$$2l + 2(g + h) + l^2 + (g + h)^2 < 1.$$

Что же касается L, то ему можно приписать любое значение, которое было бы не меньше значения функции (32) при

$$\varkappa = \frac{1}{\alpha}, \qquad h = \frac{1}{\beta}.$$

Мы остановимся на следующем предположении:

$$\alpha = 16, \qquad \beta = 12.$$

Найдем, следовательно, верхние пределы для F, Φ, Ψ, предполагая, что

$$\varkappa = \frac{1}{16}, \qquad h = \frac{1}{12}.$$

Для этих значений $\varkappa$ и h находим

$$l = \frac{5}{96}, \qquad g = \frac{5}{64}, \qquad \lambda = g + h = \frac{31}{192},$$

что дает

$$l < \frac{1}{19}, \qquad \lambda < \frac{1}{6}$$

и, следовательно,

$$2l + 2\lambda + l^2 + \lambda^2 < \frac{1}{2}.$$

Итак, будем иметь

$$(1 - 2l - 2\lambda - l^2 - \lambda^2)^{-\frac{3}{2}} < 2\sqrt{2} < \frac{17}{6}.$$

Далее находим

$$(1+l)^3 < \frac{20}{19}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{18}{17} = \frac{20}{17},$$

$$l+g < \frac{2}{15}, \qquad l+\frac{4}{5}g < \frac{2}{17},$$

и затем

$$F < \frac{38}{9} - 1 - \frac{25}{24} < 2 + \frac{3}{16},$$

$$\Phi < \frac{65\cdot 19}{18\cdot 17} - 1 - \frac{191}{192} < 2 + \frac{1}{24}.$$

Наконец, замечая, что

$$l+g+lg+\frac{1}{2}l^2 < \frac{1}{7}, \qquad l+h+lh < \frac{1}{7},$$

$$(2+l)\,lh < \frac{1}{96},$$

имеем

$$\Psi < \frac{69}{48\cdot 14} < \frac{5}{48},$$

откуда вытекает, что

$$\frac{25}{3}F + 2\Phi + \Psi < 22 + \frac{5}{12}.$$

Следовательно, мы можем взять

$$L = 22 + \frac{5}{12} = \frac{269}{12};$$

и, останавливаясь на этом значении, мы приходим к уравнению

$$h = \frac{4}{3}\varkappa + \frac{269}{12}\left\{\frac{1}{(1-16\varkappa)(1-12h)} - 1 - 16\varkappa - 12h\right\}.$$

Положим теперь

$$16\varkappa = x, \qquad 12h = y.$$

Наше уравнение будет

$$y = x + 269\left\{\frac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - x - y\right\}$$

и приведется к

$$270(1-x)y^2 - (1-x)(1-268x)y + x(1+268x) = 0.$$

Корень y этого уравнения, обращающийся в нуль при $x=0$, будет разлагаться в ряд по степеням x в том и только в том случае, если x не будет превосходить единственного положительного корня уравнения

$$(1-x)(1-268x)^2 - 4\cdot 270x(1+268x) = 0.$$

Но легко убедиться, что этот корень заключается между пределами

$$\frac{1}{7\cdot 268} \quad \text{и} \quad \frac{1}{6\cdot 268}.$$

Следовательно, для

$$x \leqslant \frac{1}{7\cdot 268}$$

разложение, о котором идет речь, будет, несомненно, пригодным.

Из этого следует, что число

$$\frac{1}{7\cdot 16\cdot 268} = \frac{1}{30016}$$

является нижним пределом для $\varkappa_0$ и что для

$$\varkappa \leqslant \frac{1}{30016}$$

ряды (27), как и ряды (28), будут, безусловно, сходиться.

Итак, в случае Солнца, сходимость наших рядов обеспечена.

О ФОРМЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ



В ответ на предложение Новороссийского университета принять участие в чтении лекций, я объявил настоящий курс, в котором предполагаю изложить решение ряда вопросов, бывших предметом моих исследований в течение последних 15 лет и представляющих те вопросы гидростатики, которые лежат в основании теории фигуры небесных тел. По известной гипотезе, каждое такое тело первоначально было в жидком состоянии, причем настоящую свою форму оно приобрело раньше отвердения, предварительно получивши, вследствие внутреннего трения, неизменную форму. В этом предположении фигура небесного тела должна представлять одну из тех, которые может принять жидкая вращающаяся масса, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона, или, по крайней мере, должны мало отличаться от такой фигуры равновесия вращающейся жидкости. Ввиду этого вопросы о формах равновесия вращающейся жидкости при сказанных условиях приобретают важное значение. Однако вопросы эти приводятся к такому вопросу анализа, для которого не существует общего решения и еще не найдено приемов, при посредстве которых можно было бы искать такое решение. Действительно, здесь все приводится к решению некоторого функционального уравнения, принадлежащего к классу уравнений, известных в настоящее время под названием интегральных, но не принадлежащих к тому простейшему классу этих уравнений, которым так много занимались математики в последние годы.

Легко написать это уравнение.

Рассмотрим сначала случай однородной жидкости.

Если она вращается вокруг некоторой оси, сохраняя неизменную форму, то эта форма будет формой относительного равновесия по отношению к системе осей, неизменно связанных с нею. А для определения условий такого равновесия достаточно к силам взаимного тяготения присоединить еще центробежную силу.

Примем ось вращения жидкости за ось z прямоугольной системы координат x, y, z, оси которой неизменно связаны с жидкой массой, и назовем через ω угловую скорость вращения, которая необходимо должна быть постоянной: иначе равновесие невозможно. Тогда центробежная сила, отнесенная к единице массы, будет иметь проекциями на оси x-ов, y-ов и z-ов следующие величины:

$$\omega^2 x; \qquad \omega^2 y; \qquad 0.$$

Сила эта будет, следовательно, иметь потенциал, равный

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

Что касается сил притяжения жидкой массы, то силы эти, отнесенные к единице массы, будут иметь потенциал

$$f\rho \int \frac{d\tau'}{D},$$

где $d\tau'$ есть элемент объема, занятого жидкостью, элемент, которому принадлежит точка (x', y', z'), а D — расстояние этой точки от той, притяжение которой рассматривается и координаты которой суть x, y, z, так что

$$D=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

причем интеграл распространен на весь объем жидкости. Затем ρ есть плотность, предполагаемая постоянной, и f —

коэффициент ньютоновского тяготения, т. е. тот коэффициент, на который нужно умножить выражение

$$\frac{mm'}{r^2},$$

чтобы получить взаимное притяжение двух материальных точек масс m и m', находящихся одна от другой на расстоянии r.

Так как предполагается, что никаких внешних сил на жидкость не действует, то условие равновесия приведется к тому, что давление на поверхности жидкости должно быть равно нулю. Можно, впрочем, сделать и более общее предположение — что это давление есть величина постоянная, т. е. что оно одинаково во всех точках поверхности.

В обоих случаях потенциал всех действующих сил должен быть постоянным на поверхности, и мы получим следующее уравнение:

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+f\rho\int\frac{d\tau'}{D}=\text{const}.$$

Это и есть то интегральное уравнение, о котором я упомянул выше.

Уравнение это, в котором первая часть есть некоторая функция x, y, z, есть, следовательно, уравнение поверхности жидкости. Но, чтобы знать эту поверхность, нужно знать ту функцию x, y, z, которую представляет интеграл

$$\int\frac{d\tau'}{D},$$

а для того чтобы эта функция была известна, нужно знать поверхность, ограничивающую тот объем, на который распространен интеграл, а эта поверхность и есть неизвестная поверхность жидкости. Чтобы решить вопрос, нужно, следовательно, поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем,

выбрать так, чтобы она совпала с поверхностью, определяемой предыдущим уравнением.[1]

Еще сложнее делается вопрос, если рассматриваемая жидкость неоднородная. В этом случае, при относительном равновесии, плотность должна оставаться постоянной на каж-

---

[1] Можно указать такие законы взаимодействия масс, при которых решение соответствующего уравнения не представляет затруднений.

Действительно, в случае притяжения, прямо пропорционального массам m и m' и расстоянию r между ними, имеем для точек поверхности жидкости уравнение

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)-f\rho\int D^2\,d\tau'=\text{const.},$$

где $2f$ — коэффициент пропорциональности силы притяжения, или, после замены D^2 его значением

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)-f\rho\,(x^2+y^2+z^2)\int d\tau'-2f\rho x\int x'\,d\tau'-$$

$$-2f\rho y\int y'\,d\tau'-2f\rho z\int z'\,d\tau'=\text{const}.$$

Так как

$$\rho\int x'\,d\tau'=Mx_0;\qquad \rho\int y'\,d\tau'=My_0;\qquad \rho\int z'\,d\tau'=Mz_0,$$

где через x_0, y_0, z_0 обозначены координаты центра инерции тела, а через M — масса тела, то, замечая, что центр тяжести должен лежать на оси вращения, мы придем к такому уравнению:

$$\frac{x^2+y^2}{2fM}+\frac{z^2}{2fM-\omega^2}=\text{const}.$$

Отсюда заключаем, что ограничивающей поверхностью является либо поверхность эллипсоида, либо поверхность гиперболоида, причем для возможности первой формы необходимо соблюдение условия

$$\omega^2<2fM.$$

Существуют и другие законы для сил взаимодействия (пропорционально нечетной степени расстояния), при которых решение задачи может быть доведено до конца.

дой поверхности, на которой давление остается постоянным, а, следовательно, на каждой поверхности, на которой потенциал действующих сил сохраняет посгоянное значение. Такие поверхности называются «поверхностями уровня».

Уравнение этой поверхности, следовательно, будет

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+f\int\frac{\rho'\,d\tau'}{D}=\alpha,$$

где α есть постоянная. Давая этой постоянной различные значения, мы получим различные поверхности уровня, и так как на каждой такой поверхности плотность ρ остается постоянной, то мы будем иметь

$$\rho=\varphi(\alpha),$$

причем под интегралом

$$\rho'=\varphi(\alpha'),$$

где α' есть значение α для той поверхности уровня, которая проходит через точку (x', y', z').

Свободная поверхность жидкости будет одна из поверхностей уровня.

Что касается уравнения

$$\rho=\varphi(\alpha),$$

которое называется законом плотностей, то функцию $\varphi(\alpha)$ в нем можно задать произвольно, и всякому, выбранному таким образом закону плотностей будет соответствовать семейство поверхностей уровня, определяемых предыдущим уравнением.

Если же рассматриваемая жидкость сжимаемая, то функция $\varphi(\alpha)$ уже не будет произвольной. В этом случае жидкость будет характеризоваться некоторой зависимостью между давлением и плотностью, так что, называя давление через p, мы будем иметь

$$\rho=f(p),$$

где f — некоторая известная функция.

Тогда известное гидростатическое уравнение

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

которое в настоящем случае приводится к

$$dp = \rho d \left[\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + f \int \frac{\rho' \, d\tau'}{D} \right],$$

дает

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + f \int \frac{\rho' \, d\tau'}{D} + \text{const}.$$

Мы будем, следовательно, иметь уравнение

$$\int_0^p \frac{dp}{f(p)} = \alpha - A$$

Здесь A — значение α для поверхности жидкости, $p = 0$. Из этого уравнения найдем p в функции α, после чего уравнением $\rho = f(p)$ определится закон плотностей.

Но, если для рассматриваемых вопросов нельзя найти общего решения, то можно указать ряд простых частных решений, исходя из которых можно искать новые решения путем последовательных приближений, основанных на предположении, что форма жидкости в новом решении мало отличается от той, которую она сохраняла в частном решении.

Из таких частных решений прежде всего следует указать сферу, которая может быть формой равновесия, если угловая скорость вращения ω равна нулю, как в случае однородной, так и в случае неоднородной жидкости, предполагая в последнем случае, что все поверхности уровня суть концентрические сферы. Закон плотностей может быть какой угодно. Но, если рассматриваемая жидкость сжимаемая, то функция $f(p)$ в уравнении

$$\rho = f(p)$$

будет возрастающею, так как плотность должна увеличиваться вместе с давлением. Но в рассматриваемом случае равновесия давление будет возрастать от поверхности жидкости к ее центру. Следовательно, если через α обозначим радиус сферы, представляющей одну из поверхностей уровня, ρ будет убывающею функциею α.

Действительно, если через r и r' обозначим радиусы — векторы точек (x, y, z) и (x', y', z'), а через φ угол между ними, то будем иметь

$$D = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi},$$

$$\int \frac{\rho'\, d\tau'}{D} = \int_0^A \rho' r'^2 dr' \int \frac{d\sigma'}{D},$$

где A — радиус сферической поверхности и $d\sigma'$ — элемент поверхности сферы радиуса 1, так что можно принять

$$d\sigma' = \sin\varphi d\varphi d\psi',$$

где ψ' — долгота, принимая за полярную ось направление, идущее к точке (x, y, z).

Поэтому

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi}} =$$

$$= \frac{2\pi}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi} \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{rr'} [r + r' - |r - r'|],$$

где $|r - r'|$ есть численное значение $r - r'$.

Поэтому, если

$$r > r',$$

то

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = \frac{4\pi}{r},$$

если же

$$r<r',$$

то

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = \frac{4\pi}{r'},$$

и мы будем иметь

$$\int \frac{\rho' d\tau'}{D} = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^r \rho' r'^2 dr' + 4\pi \int\limits_r^A \rho' r' dr'$$

и на поверхности сферы радиуса a

$$\int \frac{\rho' d\tau'}{D} = \frac{4\pi}{a} \int\limits_0^a \rho a^2 da + 4\pi \int\limits_a^A \rho a\, da,$$

что представляет убывающую функцию a, каково бы ни было a, ибо

$$\frac{d}{da} \int \frac{\rho' d\tau'}{D} = -\frac{4\pi}{a^2} \int\limits_0^a \rho a^2 da,$$

поэтому

$$\frac{dp}{da} = f\rho \frac{d}{da} \int \frac{\rho' d\tau'}{D} < 0.$$

Но и в случае неоднородной несжимаемой жидкости нужно допустить, что плотность возрастает от поверхности к центру, ибо в противном случае мы имели бы случай неустойчивого равновесия. Поэтому, рассматривая неоднородную жидкость, закон плотностей будем предполагать всегда таким, чтобы при переходе от одной поверхности уровня к другой в направлении от поверхности жидкости плотность возрастала.

Исходя из рассматриваемого частного решения, можно искать решение, в котором, при малых значениях угловой скорости, поверхности уровня мало отличались бы от кон-

центрических сфер, что представляет задачу Лежандра и Лапласа, о которой будем говорить дальше.

Других простых частных решений, кроме сферы, для неоднородной жидкости не известно. Что же касается жидкости однородной, то известны фигуры равновесия в форме эллипсоидов.

Еще Ньютоном было замечено, что эллипсоид вращения может быть формой равновесия. Но обстоятельно этот вопрос был исследован впервые Маклореном; почему фигуры равновесия в форме эллипсоидов вращения и называются эллипсоидами Маклорена. Затем Д'Аламбер показал, что всякой угловой скорости, не превосходящей известного предела, соответствуют два эллипсоида вращения, оба сжатые в направлении оси вращения. Наконец, Лаплас исследовал вопрос вполне исчерпывающим образом. Результат этих исследований можно формулировать так:

Пусть S есть момент инерции жидкой массы относительно оси вращения. Произведение $S\omega$ представит момент количества движения ее (при неизменности формы) относительно той же оси.

Обозначим его через J, так что $J = S\omega$.

Если за независимую переменную, при рассмотрении ряда эллипсоидов вращения, примем J вместо ω, то можно представить результат так:

Когда $J = 0$, то угловая скорость ω также равна нулю, и эллипсоид превращается в сферу. Допустим теперь, что J непрерывно возрастает. Тогда каждому значению J будет соответствовать одна определенная величина ω и один эллипсоид вращения, который будет непрерывно изменяться, делаясь постепенно все более и более сжатым в направлении оси. Когда J достигнет некоторой величины J_0, то ω достигает своего maximum'а ω_0. При дальнейшем возрастании J до бесконечности ω будет постоянно убывать до нуля, а эллипсоид будет продолжать сплющиваться, стремясь принять форму бесконечно тонкого диска с бесконечно

большим радиусом. Таким образом, угловая скорость имеет некоторый maximum ω_0, и пока он не достигнут, каждой ее величине соответствуют два эллипсоида вращения.

Долгое время полагали, что эллипсоиды вращения представляют единственно возможные эллипсоидальные формы равновесия однородной вращающейся жидкости. Такое мнение высказано, например, Лагранжем в его «Аналитической механике».

Но впоследствии Якоби показал, что и эллипсоиды трехосные, т. е. с тремя различными осями, могут быть формами равновесия, если отношения между осями заключаются в известных пределах. Майер подробно разобрал этот случай равновесия, а Лиувилль исследовал его окончательно.

Результаты исследований Лиувилля можно высказать так.

Примем опять момент количеств движения за независимую переменную и допустим, что он постоянно возрастает от нуля. Пока J достаточно мал, мы будем иметь только одну эллипсоидальную форму под видом эллипсоида вращения. Но прежде чем J достигнет величины J_0, соответствующей maximum'у ω для эллипсоидов вращения, он достигнет некоторой величины $J_1 < J_0$, при которой эллипсоид вращения может непрерывно перейти в трехосный эллипсоид Якоби. Пусть ω_1 — соответствующая J_1 величина угловой скорости. По мере дальнейшего возрастания J от J_1 до бесконечности, ω будет постоянно убывать до 0, а эллипсоид Якоби непрерывно изменяться таким образом, что наибольшая ось его будет возрастать, а средняя и наименьшая, из которых последняя будет совпадать с осью вращения жидкости, будут постоянно убывать. Также будет убывать и отношение средней оси к малой. С непрерывным возрастанием J и, следовательно, с приближением ω к нулю, наибольшая ось будет беспредельно возрастать, а наименьшая и средняя стремиться к нулю так, что отношение их будет стре-

миться к 1. Таким образом, эллипсоид примет форму бесконечно длинного веретена, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной к продольной оси веретена.

Таким образом, оказывается, что каждой угловой скорости, меньшей ω_1, соответствуют три эллипсоидальных формы равновесия; два эллипсоида вращения и один трехосный. Когда же ω лежит между пределами ω_1 и ω_0, мы имеем только две эллипсоидальных формы под видом эллипсоидов вращения, сливающихся при $\omega = \omega_0$. При дальнейшем же возрастании угловой скорости эллипсоидальная форма равновесия делается невозможной.

Если же вместо ω будем рассматривать J, то можно сказать, что пока $J < J_1$ возможна только одна эллипсоидальная форма — эллипсоид Маклорена. Если же $J > J_1$, получаются две эллипсоидальных фигуры: эллипсоид Маклорена и эллипсоид Якоби.

Исходя из этого частного решения, можно искать новые фигуры равновесия, мало отличающиеся от эллипсоидов, что представляет вопрос, которым я занимался в последние годы.

Из других частных решений, можно указать на кольцеобразную форму под видом тонкой кольцевой поверхности вращения, сечение которой, проходящее через ось вращения, представляет приблизительно эллипс. Эта кольцеобразная фигура была предметом исследований Пуанкаре и Софии Ковалевской.

Не останавливаясь на цилиндрических фигурах равновесия, которые не представляют другого значения, кроме значения курьезов математической задачи, укажу наконец на случай двух удаленных одна от другой масс жидкости, которые вращаются вокруг оси, проходящей через общий центр тяжести и перпендикулярной к прямой, соединяющей центры тяжести каждой массы. При достаточном удалении одной массы от другой, они будут иметь фигуры равновесия, мало отличающиеся от эллипсоидов.

Предпринимая свои исследования, я задался целью получить в каждом случае строгое и по возможности общее решение, чего до меня никто не пытался сделать, в особенности что касается строгости.

На этого рода вопросы я был наведен моим незабвенным учителем и предшественником по Академии Наук, знаменитым Чебышевым. В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причем Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами, не стоит, и что всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос.

«Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов». При этом он прибавил: «Вот если бы вы разрешили этот вопрос. на вашу работу сразу обратили бы внимание».

Впоследствии я узнал, что этот же самый вопрос Чебышев предлагал и другим математикам, как, например, Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софии Ковалевской.

Не знаю, пробовали ли решить этот вопрос Золотарев и Ковалевская. Я же сильно заинтересовался вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу. Однако при тех ничтожных математических ресурсах, которыми я обладал тогда, лишь два года спустя после окончания курса, я встретил

непреодолимые затруднения. Я довольно скоро нашел, что в первом приближении как будто никакие новые формы равновесия вблизи предельного эллипсоида невозможны, но что возможны новые фигуры, мало отличающиеся от других эллипсоидов Маклорена и Якоби. Однако всякие попытки получить следующие приближения оставались неудачными. Чебышев, которому я сообщил об этом, очень подивился, заметивши, что обыкновенно все затруднение состоит в разыскании первого приближения и что, когда оно найдено, следующие приближения получаются уже легко. Это несомненно так, когда имеется уравнение, при помощи которого можно искать эти следующие приближения. В данном же вопросе составить такое уравнение представлялось мне делом чрезвычайной трудности.

После нескольких неудачных попыток я должен был отложить решение вопроса на неопределенное время. Но вопрос этот навел меня на другой, именно на вопрос об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия, который и составил предмет моей магистерской диссертации.

В этой работе я пришел к следующим заключениям.

Пока момент количества движения менее того предела, при котором эллипсоиды Маклорена переходят в эллипсоиды Якоби, эллипсоиды Маклорена устойчивы. Если же момент количеств движения J будем увеличивать, начиная от J_1, эти эллипсоиды теряют устойчивость, и устойчивыми делаются эллипсоиды Якоби. Однако последние не всегда остаются устойчивыми, а только до тех пор, пока J, возрастая, не достигает некоторого предела J_2, при котором, насколько можно судить по первому приближению, эллипсоиды переходят в какие-то новые фигуры равновесия, представляющиеся в первом приближении телами с алгебраическими поверхностями третьего порядка. Эти фигуры впоследствии были названы грушевидными.

Этим я ограничился в своей магистерской диссертации. О новых же формах равновесия, существование которых

осталось недоказанным, ибо о них можно было судить лишь по первому приближению, я лишь упомянул в одном из положений к своей диссертации.

Через год после опубликования моей диссертации я, просматривая «Comptes Rendus», встретил заинтересовавшую меня заметку Пуанкаре, тогда еще молодого, но уже получившего известность, ученого. В этой заметке Пуанкаре говорит, что, желая доказать некоторые результаты, только что опубликованные Томсоном без доказательства, он занялся вопросом о формах равновесия вращающейся жидкости и сообщает полученные им при этом выводы. Последние оказались совпадающими с моими, хотя о новых фигурах равновесия Пуанкаре говорит не с той осторожностью, как я, а прямо утверждает, что эти фигуры существуют. Прочитавши эту заметку, я тотчас же послал Пуанкаре экземпляр своей диссертации с письмом, в котором говорю о тех затруднениях, которые я встретил, желая доказать существование тех фигур, на которые указывает первое приближение. При этом я выразил сомнение относительно возможности получить это доказательство при помощи методы последовательных приближений, ибо мне не удалось найти даже второго приближения, а затем, если бы даже и удалось найти методу, позволяющую находить приближения сколько угодно высокого порядка, то совершенно безнадежным является вопрос о доказательстве сходимости.

Однако, так как Пуанкаре утверждает, что фигуры, о которых идет речь, действительно существуют, то, следовательно, он должен обладать какой-либо другой методой для доказательства существования, я и просил его сообщить, в чем состоит эта метода. На это письмо Пуанкаре вскоре ответил, говоря, что он встретил те же самые затруднения, что и я; что он также не пошел дальше первого приближения и что метода последовательных приближений не может служить для доказательства, ибо даже разыскание второго приближения, которое в смысле доказательства не дает

ничего большего против первого, представляет непреодолимые трудности. Если же он все-таки утверждает, что формы равновесия, о которых идет речь, действительно существуют, то только на основании некоторых аналогий и на основании своего убеждения, что строгое доказательство может быть найдено. Он сообщил при этом, что вскоре должен появиться в «Acta Mathematica» его мемуар, где все его исследования будут изложены подробно. Этот мемуар появился в «Acta Mathematica» спустя два года, и, ознакомившись с ним, я совершенно им не удовлетворился.

После этого я почти в течение 20 лет не занимался этим вопросом, будучи отвлечен другими занятиями, и только после избрания меня в Академию, получив надлежащий досуг, вновь возвратился к вопросу Чебышева. Замечательно, что я при этом вновь встретился с Пуанкаре, который около этого же времени занялся вопросом об устойчивости грушевидной формы равновесия.

Чтобы можно было что-либо сделать в данном вопросе, прежде всего следовало выяснить, отчего возникают такие непреодолимые, как казалось, трудности при разыскании второго приближения. Размышляя по этому поводу, я вскоре нашел, в чем заключается препятствие. Желая отыскивать новые фигуры, мало отличающиеся от данного эллипсоида, я сравнивал их именно с этим эллипсоидом, и то же самое делал также и Пуанкаре, а от этого то и происходило все затруднение. Между тем оно легко устранимо. Стоило только сравнивать искомую фигуру с переменным эллипсоидом, софокусным с данным и проходящим всегда через ту точку искомой поверхности, в которой рассматривается значение потенциала притяжения жидкой массы. Вводя этот переменный эллипсоид, я устранил все затруднения и получил методу, позволяющую разыскивать приближения сколь угодно высокого порядка. Мало того, пользуясь методой Коши, известной под именем методы мажорантных функций, я нашел воз-

можным доказать и самую сходимость ряда последовательных приближений, продолженных до бесконечности, и таким образом я пришел к строгому доказательству существования тех форм равновесия, о которых шла речь выше. Вместе с тем я получил и полное решение задачи Чебышева, ответ на которую получился отрицательный.

Что касается упомянутой выше работы Пуанкаре, то он, желая решить вопрос об устойчивости, должен был заняться разысканием второго приближения, что и составляет главное содержание его мемуара. Это ему удалось, благодаря очень остроумному частному приему, но прием этот такого рода, что не позволяет итти далее второго приближения; но для составления условия устойчивости второе приближение дает все, что нужно.

Этим вопросом Пуанкаре занялся вследствие обращенного к нему письма Дарвина, который в это время старался разрешить вопрос об устойчивости грушевидной фигуры и просил Пуанкаре помочь ему в разыскании необходимого для этого второго приближения, найти которое ему самому не удалось.

После мемуара Пуанкаре, в котором содержатся лишь общие формулы, между тем как вопрос зависит от численных вычислений, Дарвин опубликовал свой мемуар, в котором производит эти в высшей степени сложные вычисления и в результате приходит к выводу, что грушевидная форма равновесия устойчива. Этим результатом очень дорожил Дарвин, так как этот результат служил подтверждением его космогонической теории.

Однако я, занимаясь тем же вопросом, пришел к противоположному заключению, именно, что грушевидная фигура неустойчива, и я считал свой результат правильным, так как при вычислениях я исходил из точных формул, тогда как Дарвин пользовался формулами приближенными. Я опубликовал свои результаты в мемуаре 1905 г. «Sur le problème de Tchèbyschef», дающим резюме моих исследований о формах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидальных.

В результате этого опубликования возникла между Дарвином и мною полемика. Дарвин никак не хотел отказаться от своего результата, так как этим разрушилась бы его теория, построенная, по моему мнению, более на фантазии, чем на точных данных. Полемика эта продолжалась несколько лет, пока в 1912 г. я не опубликовал третьей части своего мемуара: «Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes», в котором подробно излагаю выводы своих точных формул и все свои вычисления.

Но прежде чем заняться задачей Чебышева, я обратился к упоминавшейся уже мною задаче Лапласа, которая требовала также многих изысканий.

Замечу, что эту задачу часто называют задачей Клеро. Но это не совсем правильно. Клеро, рассматривая неоднородную жидкую массу, вращающуюся весьма медленно, предположил a priori, что поверхности уровня суть эллипсоиды вращения, и занимался лишь разысканием элементов этих эллипсоидов, ограничиваясь первым приближением.

Между тем так задачу ставить нельзя, ибо поверхности уровня в ней не могут быть эллипсоидами, как это и было доказано значительно позже. Можно только сказать, что они мало отличаются от эллипсоидов, но и это только в первом приближении, ибо уже во втором приближении они делаются некоторыми поверхностями вращения четвертого порядка.

Таким образом, совершенно неправильно искать элементы эллипсоидов в первом приближении, ибо это суть элементы тех эллипсоидов, которые сами представляют неизвестные поверхности в первом приближении.

Таким образом, по самой постановке задачи Клеро не мог итти далее первого приближения.

Теории Лежандра и Лапласа свободны от этого недостатка, так как эти геометры, ничего не предрешая заранее, ищут искомые поверхности путем последовательных приближений.

Теория Лапласа, основывающаяся на разложении по функциям, известным под именем лапласовых или сферических, дает возможность продолжать вычисления, при разыскании последовательных приближений, сколько угодно далеко. Но, не говоря уже о том, что ни Лаплас, ни кто-либо другой после него не пытались исследовать сходимость ряда приближений, что одно только могло дать прочное основание для теории, при самом составлении своих уравнений Лаплас делает предположения, недопустимые a priori, и тем делает свою теорию сомнительной. Прежде всего он допускает a priori, что искомая функция разлагается в ряд по шаровым функциям. Но это еще не так важно. Гораздо важнее другой недостаток теории: при составлении своих уравнений он пользуется недопустимыми разложениями в ряды. Войду в некоторые подробности.

Наравне с поверхностью жидкости вообразим шаровую поверхность, ограничивающую тот же объем, какой занимает жидкость; радиус этой сферы обозначим через a. Расстояние r точки поверхности жидкости от центра выразим через $a(1+\zeta)$, где ζ — численно малая величина, так как по условию поверхность уровня мало отличается от сферы. Величина эта явится функцией координат точки на сфере; за такие координаты мы примем углы: θ — дополнение широты, ψ — долготу. Расстояние r' какой-либо другой точки тела будем выражать также формулой $r'=a'(1+\zeta')$, где a' радиус сферы, объем которой равен объему жидкости, ограниченному поверхностью уровня, проходящей через данную точку. В таком случае интеграл, через который выражается потенциал сил притяжения частиц жидкости, можно представить таким образом:

$$\int \frac{\rho'\,d\tau'}{D}=\int_0^A \rho' a'^2 da' \int \frac{(1+\zeta')^2\left(1+\frac{\partial a'\zeta'}{\partial a'}\right) d\sigma'}{D}.$$

Здесь через A обозначен радиус шара, объем которого равен объему всей вращающейся жидкости. При составлении

выражения интеграла элемент объема $d\tau'$ заменен выражением $r'^2 dr' d\sigma'$, где через $d\sigma'$ обозначен элемент сферы радиуса единицы. Кроме того,

$$dr' = \left(1 + \frac{\partial a' \zeta'}{\partial a'}\right) da',$$

$$D = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi}.$$

Для подчисления интеграла Лаплас разлагает в ряд выражение $\frac{1}{D}$, причем пользуется разложением при $\frac{r'}{r} < 1$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r} \sum_0^\infty \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\varphi), \qquad (*)$$

а при $\frac{r}{r'} < 1$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r'} \sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\varphi), \qquad (**)$$

где через $P_n(\cos\varphi)$ обозначен полином Лежандра n-ой степени. В приложении указанных разложений при отмеченных условиях заключается нестрогость. Будет существовать, вообще говоря, такой слой, для которого и то и другое разложение непригодно. Действительно: если наибольшее значение модуля ζ обозначим через l, так что $|\zeta| \leqslant l$, то из условий

$$\frac{r'}{r} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{r}{r'} < 1$$

получим такие пределы для a':

$$a' < a\frac{1-l}{1+l}; \qquad a' > a\frac{1+l}{1-l},$$

для которых разложения (*) и (**) справедливы. Однако остается слой

$$a' > a\frac{1-l}{1+l}; \qquad a' < a\frac{1+l}{1-l},$$

для точек которого разложение сомнительно. Еще Пуассон обратил внимание на это обстоятельство.

В последнее время этим занимался Каллапдро.

Заметим, что нет необходимости прибегать к разложениям по шаровым функциям, — и, таким образом, можно обойти указанную нестрогость. В моей работе «Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes» это выполнено путем разложения потенциальной функции в ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

где u_i — целая однородная функция относительно ζ и ζ', причем сделано допущение о малости не только величины $|\zeta|$, но и величин

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right|, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\right|,$$

а также

$$\left|\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\right|, \quad \left|\frac{\partial a\zeta}{\partial a}\right|.$$

В дальнейшем изложении мы покажем, что вся теория может быть основана лишь на двух предположениях, а именно, что $|\zeta|$ — мало́, и второе, что ζ является непрерывной функцией от a.

Кроме того, конечно, мы будем основываться на том, что речь идет о поверхности замкнутой и мало отличающейся от сферы.

ПРИЛОЖЕНИЯ



БИОГРАФИЯ А. М. ЛЯПУНОВА



Александр Михайлович Ляпунов родился 25 мая (старого стиля) 1857 г. в Ярославле, где его отец был тогда директором Демидовского лицея — высшего общеобразовательного учебного заведения.

Приведем кратко данные о предках и родственниках Ляпунова. Его дед, Василий Михайлович Ляпунов, с 1826 г. занимал хозяйственные должности при Казанском университете. Старший сын В. М. Ляпунова, Виктор, был дедом академика А. Н. Крылова (через его мать Софию Викторовну), а младшая дочь, Екатерина, была замужем за Р. М. Сеченовым, родным братом физиолога И. М. Сеченова. От этого брака родилась дочь, Наталия Рафаиловна, — двоюродная сестра А. М. Ляпунова. В 1886 г. она стала его женой.

В многочисленной семье В. М. Ляпунова был сын Михаил — отец А. М. Ляпунова. М. В. Ляпунов в 1839 г. окончил Казанский университет, в 1840 г. стал астрономом-наблюдателем при Казанском университете и с 1850 г. заведывал обсерваторией. Он работал в Казанском университете до 1855 г. В 1856 г. М. В. Ляпунов стал директором Демидовского лицея в Ярославле, о чем мы уже упоминали. В 1852 г. М. В. Ляпунов женился на Софье Александровне Шипиловой. У них было семеро детей, из которых четверо умерли малолетними. Из оставшихся трех сыновей старшим был Александр Михайлович. Средний, Сергей Михайлович (1859—1924), был известным

композитором (ученик М. А. Балакирева) и младший, Борис Михайлович (1864—1942), был действительным членом Академии Наук СССР по специальности славянской филологии.

В 1863 г. отец А. М. ушел в отставку и поселился сначала в усадьбе своих родителей, а затем в усадьбе своей жены, в с. Болобонове бывшей Симбирской губернии, где и скончался в 1868 г.

Первоначальное обучение Ляпунов получил у своего отца. Дальнейшее его образование продолжалось, после смерти отца, в семье его дяди Р. М. Сеченова, о котором мы уже упоминали. Здесь он вместе со своей двоюродной сестрой (и будущей женой) Наталией Рафаиловной готовился к поступлению в гимназию. Вся обстановка как дома, так и у ближайших родственников, с которыми общался Ляпунов, пробуждала в нем интерес к науке. В 1870 г. мать Ляпунова со своими тремя сыновьями переселилась в Нижний-Новгород (ныне Горький), и Ляпунов поступил в 3-й класс гимназии, которую окончил с золотой медалью в 1876 г. В этом же году он поступил на естественное отделение физико-математического факультета Петербургского университета, но через месяц перешел на математическое отделение.

Это было временем расцвета знаменитой Петербургской математической школы, созданной великим П. Л. Чебышевым. Профессорами Университета по математике были тогда такие выдающиеся ученые, как сам П. Л. Чебышев и его знаменитые ученики А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев. Среди учителей А. М. были также такие прекрасные профессора, как К. А. Поссе и Д. К. Бобылев. В 1878 г., на два года раньше Ляпунова, окончил Петербургский университет А. А. Марков, с которым А. М. Ляпунов всю свою жизнь поддерживал тесное научное общение и с которым после 1902 года был связан по работе в Академии Наук. Эта обстановка Петербургского университета послужила благоприятной почвой для развития исключительного математического таланта Ляпунова. В дальнейшем при изложении научных работ Ляпу-

нова мы более подробно остановимся на его связи с Петербургской школой.

В Университете Ляпунов уделял наибольшее внимание лекциям П. Л. Чебышева, который, по признанию самого Ляпунова, «своими лекциями, а затем советами, оказал существенное влияние на характер последующей ученой деятельности его» (Мат. для биограф. слов. д. чл. Акад. Наук, I, стр. 430).

Чрезвычайно яркую характеристику Чебышева как профессора и ученого дал Ляпунов в очерке, посвященном памяти Чебышева (Харьков, 1895).

Первые самостоятельные научные шаги Ляпунова прошли под руководством профессора механики Петербургского университета Д. К. Бобылева. В 1880 г. Ляпунов получил золотую медаль за сочинение на предложенную факультетом тему по гидростатике. Это сочинение послужило основой двух первых напечатанных работ: «О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы» и «О потенциале гидростатических давлений». В автобиографии Ляпунова мы читаем:

«В 1881 г. по совету Бобылева, руководившего занятиями Ляпунова и всегда поощрявшего его в стремлении к самостоятельной работе, напечатал в „Журнале Физико-химического общества“ свои первые две работы, относящиеся к гидростатике».

По окончании Университета (1880) Ляпунов был оставлен, по предложению Д. К. Бобылева, при кафедре механики. Связь Ляпунова с Бобылевым продолжалась до самой смерти последнего (20 февраля 1917 г). В речи, посвященной памяти Бобылева, Ляпунов говорил:

«Почти 40 лет я знал покойного, который был моим учителем и руководителем моих занятий в первые годы по окончании мною университетского курса. Вспоминая эти годы, в которые я особенно близко узнал Дмитрия Константиновича, не могу не выразить ему глубочайшей благодар-

ности за ту готовность, с которой он, всегда очень занятый, уделял мне свое время, просматривая приносимые ему мною мои первые юношеские произведения, иногда довольно наивного характера, или разъясняя казавшиеся мне темными места изучаемых мною авторов. Уверен, что и другие ученики Д. К., так же, как и я, близко знавшие его, отнесутся с такою же благодарностью к памяти этой светлой личности».

В 1882 г. Ляпунов закончил сдачу магистерских экзаменов, и ему надо было приступать к работе над магистерской диссертацией. В помещаемой в настоящем сборнике лекции «О форме небесных тел», мы читаем:

«В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причем Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами, не стоит, и что всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос: „Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов". При этом он прибавил: „Вот если бы Вы разрешили этот вопрос, на Вашу работу сразу обратили бы внимание"».

Далее Ляпунов продолжает:

«Впоследствии я узнал, что этот же вопрос Чебышев предлагал и другим математикам, как, например, Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софии Ковалевской. Не знаю, пробовали ли решать этот вопрос Золотарев и Ковалевская.

Я же сильно заинтересовался этим вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу».

Далее Ляпунов пишет:

«После нескольких неудачных попыток я должен был отложить решение вопроса на неопределенное время. Но вопрос этот навел меня на другой, именно на вопрос об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия, который и составил предмет моей магистерской диссертации».

Эта диссертация под заглавием «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (СПб., 1884) была защищена в январе 1885 г. в Петербургском университете. Оппонентами были Д. К. Бобылев и профессор Артиллерийской академии, работавший некоторое время в Петербургском университете, Н. С. Будаев.

Эта диссертация сделала имя Ляпунова известным в Европе. Сразу после выхода краткое содержание ее появилось в «Bulletin Astronomique». В 1904 г. она была переведена, по инициативе Коссера (E. Cosserat), на французский язык и напечатана в «Annales de l'Université de Toulouse». Весною 1895 г. Ляпунов был утвержден в звании приват-доцента и тогда же получил предложение занять кафедру механики в Харьковском университете, куда и переехал осенью того же года.

На этом кончается первый период жизни Ляпунова в Петербурге, куда он возвращается в 1902 г., после избрания его в действительные члены Академии Наук.

Приведем короткую выдержку из воспоминаний Б. М. Ляпунова об А. М. Ляпунове, относящуюся ко времени от 1881 до 1885 г., когда оба брата жили вместе в Петербурге.

«Мы жили в одной комнате в квартире вдовы Михайловской, сестры профессора физиолога И. М. Сеченова, и я был свидетелем напряженных занятий брата во время приготовления к сдаче магистерских экзаменов и защите первой диссертации. В то время он любил работать по ночам.

Раз в неделю у нашей хозяйки собирались родные, в том числе и физиолог И. М. Сеченов, любивший отдохнуть в кругу учащейся молодежи, собиравшейся по воскресеньям у его сестры. Помню также, что в то время брат А. М. давал уроки И. М. Сеченову по тем отделам математических наук, которые считал особенно важным для физиолога Иван Михайлович, принимавший самое теплое участие во всех научных успехах А. М. Ляпунова».

Тесная связь между А. М. Ляпуновым и И. М. Сеченовым поддерживалась до конца жизни И. М. Сеченова.

О начале Харьковского периода Ляпунов в своей автобиографии пишет:

«Здесь в первое время ученая деятельность Ляпунова должна была прекратиться... Приходилось вырабатывать курсы и составлять записки для студентов, что отнимало много времени». Эти литографированные курсы механики представляются во многих отношениях оригинальными. Их разбор приведен в речи академика А. Н. Крылова, произнесенной им 3 мая 1919 г. и напечатанной в том же году в «Известиях Академии Наук».

На том же заседании академик В. А. Стеклов — первый ученик Ляпунова по Харьковскому университету — произнес речь памяти своего учителя, в которой расказывал о первых выступлениях Ляпунова в Харьковском университете. Приведем его слова:

«В 1884 г., как известно, был разрушен устав 1863 г., началась реакция Делянова. В 1885 г. я был слушателем III курса и, как старый студент устава 1863 г., состоял с большинством товарищей в крайней оппозиции новым порядкам. Когда мы, студенты, узнали, что к нам приехал из Петербурга новый профессор механики, то сейчас же решили, что это должно быть какая-нибудь жалкая посредственность из деляновских креатур... в аудиторию вместе с уважаемым всеми студентами старым деканом профессором Леваковским вошел красавец мужчина, почти ровесник

некоторых из наших товарищей и, по уходе декана, начал дрожащим от волнения голосом читать вместо курса динамики систем, курс динамики точки, который мы уже прослушали у профессора Деларю... курс механики мне был уже знаком. Но с самого начала лекции я услышал то, чего раньше не слыхал и не встречал ни в одном из известных мне руководств. И все недружелюбие курса сразу разлетелось прахом; силою своего таланта, обаянию которого в большинстве случаев бессознательно поддается молодежь, Александр Михайлович, сам не зная того, покорил в один час предвзято настроенную аудиторию. С этого же дня А. М. занял совершенно особое положение в глазах студентов, к нему стали относиться с исключительно почтительным уважением. Большинство, которому не были чужды интересы науки, стало напрягать все силы, чтобы хоть немного приблизиться к той высоте, на которую влек А. М. своих слушателей».

Во время зимнего перерыва в занятиях 1885/86 учебного года Ляпунов приезжал в Петербург и 17 января 1886 г. обвенчался со своей двоюродной сестрой Наталией Рафаиловной Сеченовой. До 1890 г. Ляпунов один вел все преподавание механики в Харьковском университете. За первые два года пребывания в Харькове он, кроме работы над составлением курсов, напечатал в «Сообщениях Харьковского математического общества» две статьи по теории потенциала. Еще в 1885 г. он предполагал прочесть специальный курс теории потенциала в Петербургском университете. Этот курс не состоялся в виду отъезда Ляпунова в Харьков.

В 1888 г. начинают появляться в печати работы Ляпунова, посвященные вопросам устойчивости движений механических систем с конечным числом степеней свободы. В 1892 г. он выпускает свою замечательную работу «Общая задача об устойчивости движения», в которой вопрос об устойчивости или неустойчивости движения (или равновесия) механических систем с конечным числом степеней свободы впервые рас-

сматривается с исключительной глубиной и точностью, с одной стороны, и общностью, с другой стороны. Эта работа послужила докторской диссертацией. Защита состоялась в сентябре 1892 г. в Московском университете, и оппонентами были Н. Е. Жуковский и В. Б. Млодзеевский. Эта диссертация, как и магистерская, была переведена на французский язык и напечатана в «Annales de l'Université de Toulouse». После защиты докторской диссертации Ляпунов в 1893 г. был утвержден ординарным профессором.

В ряде последующих работ Ляпунов внес существенные дополнения к упомянутой диссертации. Печатание этого цикла работ по устойчивости закончилось в 1902 г.

К харьковскому периоду относятся еще два направления работы Ляпунова: по теории потенциала и по теории вероятности.

Под влиянием Ляпунова среди харьковских математиков проявился большой интерес к вопросам математической физики и в первую очередь к основным предельным задачам для уравнения Лапласа. Исследование этих задач тесно связано с теорией потенциала. Ляпунов обнаружил ряд неправильностей и недоделок в этом, казалось бы, классическом разделе математической физики. Он, как мы упоминали выше, еще раньше интересовался теорией потенциала. Его работы по теории потенциала, особенно мемуар «Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet» (1897), впервые строго выяснили ряд основных моментов теории потенциала и послужили отправным моментом для дальнейших работ, в частности, для работ В. А. Стеклова.

Работы Ляпунова по теории вероятности, представленные в 1900 и 1901 гг. А. А. Марковым Академии Наук, посвящены доказательству приложимости, при весьма общих предположениях, предельной теоремы Лапласа к сумме случайных независимых величин. Их исключительно важное значение в теории вероятности основано не только на полученном в них результате, но и на примененном в этих

работах новом методе (характеристических функций), который получил затем широкое применение в теории вероятности. В 1879—1880 гг. Ляпунов слушал лекции П. Л. Чебышева по теории вероятности. Эти лекции по записям А. М. были изданы академиком А. Н. Крыловым. В этих лекциях Чебышев набрасывает доказательство предельной теоремы для сумм независимых случайных величин, и в конце этого изложения мы читаем: «Нестрогость вывода заключается в том, что мы делали различные предположения, не показав предела происходящих от этого погрешностей. Этого же предела не может дать сколько-нибудь удовлетворительным образом математический анализ в настоящем своем состоянии». В конце харьковского периода Ляпунов читал лекции по теории вероятности в Университете. Метод, намеченный Чебышевым в его лекциях, был им затем развит в одной из его работ и вполне строго проведен в работе А. А. Маркова. Все это, естественно, направило внимание Ляпунова на предельную теорему теории вероятности.

Кроме научной и учебной работы, Ляпунов принимал деятельное участие и в общеуниверситетских делах. Приведем характеристику Ляпунова, данную профессором Харьковского университета академиком В. П. Бузескулом:

«А. М. Ляпунов принадлежал к тем профессорам, которые составляют истинную душу университета, которыми университет живет и процветает, которые носят в себе идеал профессора и ученого. Все низменное было ему чуждо... Он постоянно витал в сфере науки. Бывало, в профессорской комнате, в промежутке между лекциями, видишь его в кругу своих коллег, ближайших по специальности, всегда беседующим по научным вопросам... С течением времени к этим темам присоединилась и другая, близкая, — наболевший университетский вопрос».

Большое значение имела деятельность Ляпунова в Харьковском математическом обществе. С 1899 по 1902 г. он состоял председателем этого общества и редактором его «Сообще-

ний». Все свои работы харьковского периода он докладывал на заседаниях Общества. Здесь же докладывались работы и его учеников — В. А. Стеклова и Н. Н. Салтыкова.

В 1900 г. Ляпунов был избран членом-корреспондентом Академии Наук, а 6 ноября 1901 г. ординарным академиком по кафедре прикладной математики. Эта кафедра оставалась вакантной после смерти П. Л. Чебышева (1894). Таким образом по Академии Ляпунов оказался преемником своего знаменитого учителя. Весною 1902 г. Ляпунов переехал в Петербург, и на этом кончается харьковский период его жизни. В опубликованной речи В. А. Стеклова мы читаем: «Впоследствии он с особой любовью вспоминал этот период своей жизни (от 1885 до 1902 г.) и в беседах со мною часто называл его самым счастливым».

В Петербурге Ляпунов не занимался никакой педагогической работой и посвятил все свое время исключительно науке. Он вернулся к той проблеме Чебышева, с которой начал свою научную деятельность, и, существенным образом расширив ее постановку, он в ряде обширных по объему и исключительных по силе анализа работ довел весь вопрос до конца. В своей речи В. А. Стеклов говорил:

«И тем подвигом, которым он пытался начать свою ученую деятельность, он блестяще закончил, как увидим, свою славную жизнь, так преждевременно прерванную. Работу, совершенную Александром Михайловичем, нельзя и назвать иначе как подвиг».

Работы Ляпунова второго периода его жизни в Петербурге относятся в основном к теории фигур небесных тел, т. е. к вопросу о формах равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. В этих работах Ляпунов впервые доказывает существование фигур равновесия, близких к эллипсоидам по форме, но отличных от эллипсоидов, а также исследует устойчивость этих новых фигур равновесия. Задача решается Ляпуновым как в случае однородной, так и в случае неоднородной жидкости.

В первых двух работах этого цикла (1903—1904 гг.) рассматривается медленно вращающаяся неоднородная жидкость, форма поверхности которой близка к сфере. Эти работы имеют непосредственную связь с работами Клеро и Лапласа, и в них поставленная задача впервые строго решается до конца.

При переезде в Петербург Ляпунов сначала стал заниматься вопросом о фигурах равновесия однородной жидкости, близких к эллипсоидальным. В это же время он получил от В. А. Стеклова известие о том, что Пуанкаре выпустил книгу о фигурах равновесия («Figures d'équilibre d'une masse fluide», лекции в Сорбонне в 1900 г.). Ляпунов прервал свою работу и занялся упомянутым выше вопросом о формах равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости. Приведем выдержки из писем этого времени от Ляпунова к В. А. Стеклову. От 15 февраля 1903 г. Ляпунов пишет: «Благодарю Вас за Ваше сообщение, которое предупредит меня от напрасной потери времени. Как это ни досадно, а работу придется теперь бросить, ибо, судя по тому, что Вы пишете, Пуанкаре сделал именно то, что должно было составить предмет моего исследования, и нет сомнения, что он исходил при этом из тех же самых соображений, которые служат точкой отправления в моих изысканиях и благодаря которым я и придавал значение своей работе: иначе он не мог бы сделать шагу в рассматриваемом вопросе».

Получив книгу Пуанкаре и ознакомившись с ней, Ляпунов пишет В. А. Стеклову от 21 февраля 1903 г.:

«К величайшему моему изумлению в этой книге я не нашел ничего сколько-нибудь значительного. Большая часть книги посвящена изложению (и, должен прибавить, весьма беспорядочному) результатов, давно известных. Что же касается занимающего меня вопроса, то Пуанкаре лишь повторяет в весьма сокращенном виде то, что говорил в своем старом мемуаре 1886-го года. Никаких признаков доказательств существования форм равновесия, близких к эллипсоидам

Маклорена и Якоби, здесь нет, и, повидимому, Пуанкаре в этом вопросе стоит на той же точке, как и 17 лет тому назад. Таким образом работа моя ничуть не пострадала, и я снова за нее примусь. При этом недельный перерыв этой работы оказался очень полезным для дела, ибо в этот промежуток я приступил к другой работе, относящейся к вопросу о равновесии неоднородной вращающейся жидкости. Теория Клеро и Лапласа требуют весьма существенного дополнения, ибо существование исследуемой в нем формы равновесия не доказано. Этим вопросом я также давно хотел заняться. Но он мне представлялся более сложным, чем вопрос о форме равновесия однородной жидкости, близкой к эллипсоидальной. Я предполагал поэтому разрешать сначала последний вопрос, а затем те же принципы приложить к решению второго.

«Теперь, занимаясь этим вопросом, я убедился, что он много легче первого. Вычисления того же характера, но несравненно проще (форма равновесия мало отличается от сферы). Выполняя же эти вычисления, я заметил, что и при решении первого вопроса возможны значительные упрощения вычисления, и что я шел чересчур сложным путем. Таким образом перерыв в работе оказался полезным в двух отношениях: наладилась новая работа и выяснилась возможность значительного упрощения в прежней. Теперь я предполагаю продолжать вторую работу (относящуюся к теории Лапласа), так как она скорее может быть приведена к окончанию, а затем вновь примусь за первую».

Наконец в письме от 7 апреля 1903 года Ляпунов пишет:

«Только на прошлой неделе мне удалось устранить все затруднения в доказательстве сходимости рядов, которыми выражается решение задачи Лапласа (о форме равновесия неоднородной вращающейся жидкости при малой угловой скорости). Теперь необходимо заняться упрощением этого доказательства, которое пока еще очень сложно. А затем, опубликовав коротенькую заметку по этому вопросу, я пе-

рейду к тому, которым начал заниматься в январе (о формах равновесия однородной вращающейся жидкости, близких к эллипсоидным). Подробные мемуары по этим вопросам я едва ли в состоянии буду редактировать ранее как через год, так как обработка частностей потребует очень много времени».

Эти цитаты дают ясное представление о начале той громадной работы, которая была выполнена Ляпуновым во второй петербургский период его жизни. Во вступительной лекции к своему курсу «О форме небесных тел», который он начал читать в 1918 г. в Одессе, Ляпунов указывает, что задача Лапласа решена им при более общих предположениях, чем раньше. Соответственные материалы до сих пор не обнаружены.

В Петербурге Ляпунов вел замкнутый образ жизни. Его деятельность ограничивалась Академией Наук. Круг его знакомств состоял из близких родственников и его учителей и товарищей по науке: Д. К. Бобылев, А. Н. Коркин, А. А. Марков, К. А. Поссе, А. Н. Крылов и В. А. Стеклов, который в 1906 г. переехал из Харькова в Петербург. Летом Ляпунов уезжал в родную деревню (с. Болобоново бывшей Симбирской губернии), но и здесь он не прерывал своей научной работы. Б. М. Ляпунов (брат А. М.) в своем очерке жизни и деятельности Ляпунова пишет:

«... в часы отдыха А. М. любил отдаваться обаянию красок природы, любил и умел сажать и выращивать комнатные и садовые деревья. И харьковская и позднее петербургская квартиры его были украшены им самим выращенными фикусами и пальмами».

В 1908 г. Ляпунов принимал участие в Четвертом Международном математическом конгрессе в Риме. Еще до этого времени он переписывался по научным вопросам с рядом заграничных математиков. Среди них были: Пуанкаре, Пикар Корн, Коссера и др. На съезде он завязал личные знакомства со многими математиками. С 1909 г. Ляпунов прини-

мал участие в издании полного собрания сочинений Эйлера. В частности, он являлся одним из редакторов двух математических томов (18-го и 19-го), которые вышли в свет уже после его смерти. Это издание, осуществляемое Швейцарским обществом естествоиспытателей, далеко не закончено и до настоящего времени.

Ученые заслуги Ляпунова получили широкое признание. Он состоял почетным членом Петербургского, Харьковского и Казанского университетов, иностранным членом Академии наук dei Lincei в Риме, членом-корреспондентом Парижской академии, почетным членом Харьковского математического общества и членом ряда других научных обществ.

В конце июня 1917 г. Ляпунов вместе с женой уехал в Одессу, где в то время жил его брат Борис Михайлович. Весной 1918 г. у Н. Р. Ляпуновой обострился туберкулез легких, которым она страдала и раньше, и к концу лета болезнь приняла угрожающий характер. В сентябре 1918 г. Ляпунов начал в Новороссийском университете чтение специального курса «О форме небесных тел», посвященного изложению его последних работ. Вступительная лекция этого курса приведена в настоящем издании.

31 октября 1918 г. скончалась Н. Р. Ляпунова, и через три дня, 3 ноября н. ст., скончался А. М. Ляпунов. В оставленной записке он просил похоронить себя в одной могиле с женой.

После смерти Ляпунова была найдена большая рукопись законченной работы, в которой дано доказательство существования фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, в случае неоднородной жидкости. Эта рукопись была издана к двухсотлетнему юбилею Академии Наук («Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation», 1925—1927).

Так преждевременно ушел из жизни выдающийся ученый и редкий по своим внутренним качествам человек. Его ближайший ученик В. А. Стеклов, лично связанный с Ляпуновым

в течение тридцати лет, дает в своей речи яркую характеристику его, как человека. Мы приведем ее в заключение этого краткого очерка.

«Воспитанный сначала своим отцом, сотоварищем Н. И. Лобачевского по Казанскому университету, затем в кругу лиц, близких к нашему физиологу И. М. Сеченову, проведший свою юность в среде наиболее просвещенной части нашего тогдашнего общества, на умы которого еще продолжали влиять Н. А. Добролюбов и Н. Г. Чернышевский, А. М. Ляпунов олицетворял собою лучший тип идеалиста 60-х годов, в настоящее время быть может не всем понятный.

«Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаветное служение науке, ею он жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и самая жизнь для него ничего не стоит.

«С самого начала своей ученой деятельности он работал изо дня в день до четырех — пяти часов ночи, а иногда являлся на лекции (в Харьковском университете), не спав всю ночь.

«Он не позволял себе никаких развлечений, и если появлялся иногда (раз или два в год) в театре или в концерте, то лишь в самых исключительных случаях, как, например, на редких концертах своего брата, известного композитора С. М. Ляпунова.

«Круг знакомства А. М. был крайне ограничен и состоял из ближайших его родственников и небольшого числа ученых, преимущественно математиков, причем редкие товарищеские собрания, на которых бывал А. М. Ляпунов, преимущественно сводились, особенно в харьковский период его жизни, к высшей степени поучительным собеседованиям по текущим вопросам науки.

«Отчасти потому и производил он иногда на лиц, мало его знавших, впечатление молчаливо-хмурого, замкнутого человека, что зачастую был настолько поглощен своими

научными размышлениями, что смотрел — и не видел, слушал — и не слыхал...

«В действительности же за внешней сухостью и даже суровостью в А. М. Ляпунове скрывался человек большого темперамента с чуткой и, можно сказать, детски чистой душой... высоко развитое чувство чести и внутреннего достоинства, бросавшееся в глаза всякому, даже при мимолетной встрече с ним, действовало импонирующим образом на всех...»

Такова была жизнь великого русского ученого и одного из ярких и лучших представителей русского образованного общества конца XIX и начала XX в., Александра Михайловича Ляпунова.

Академик *В. И. Смирнов.*

ОЧЕРК НАУЧНЫХ ТРУДОВ А. М. ЛЯПУНОВА



А. М. Ляпунов был ближайшим учеником П. Л. Чебышева и ярким представителем знаменитой Петербургской математической школы, созданной П. Л. Чебышевым. До появления в печати научных работ А. М. Ляпунова главнейшие достижения Петербургской школы относились к теории чисел, теории функций, связанной с идеями Чебышева о наилучшем приближении, и теории вероятности. В работах Ляпунова Петербургская школа впервые блестяще выступает в области математического анализа и его приложений к механике.

Одна характерная особенность Петербургской школы — это интерес к трудным конкретным задачам, которые естественно возникают в ходе развития науки и представляют принципиальный интерес.

Чебышев и его ученики относились отрицательно к общим теориям и абстрактным схемам, оторванным от конкретных задач. При этом решение задачи они всегда доводили до определенного способа вычисления, до определенного алгорифма и не довольствовались доказательствами типа чистых доказательств существования без алгорифма.

С другой стороны, представители Петербургской математической школы живо интересовались приложениями математики к различным вопросам естествознания. Обе эти тенденции нашли яркое выражение в работах Ляпунова.

Предметом его работ были всегда большие и принципиальные, но совершенно конкретные задачи механики, математической физики, теории вероятности. Ляпунов в совершенстве владел математическим аппаратом и математическими понятиями. По силе преодоления трудностей в этом отношении он был исключительным математиком.

Однако было бы неправильно считать, что Ляпунов занимался лишь частными задачами. Наоборот, он всегда ставил себе большие, имеющие принципиальное значение и в науке и для приложений задачи и ставил их со всей той общностью, при которой он мог довести их решение до алгорифма.

В одной из своих работ, посвященной теории фигуры планет, Ляпунов вводит, как бы мимоходом, на двух-трех страницах, новое понятие интеграла для того, чтобы использовать потом это новое понятие в основном уравнении задачи. Он делает это, потому что сама физическая сущность задачи (возможность разрывов в плотности при проникновении внутрь планеты) заставляет его отказаться от обычного понятия интеграла. В другой работе, об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости, Ляпунов, исследуя некоторые интегралы от разрывных функций по возмущенному объему жидкости, вводит со всей строгостью понятие измеримого объема (в современной терминологии измеримого по Жордану) и с исчерпывающей обстоятельностью выясняет те трудности, которые возникают при приведении тройного интеграла к последовательным квадратурам в общем случае. Это делается Ляпуновым, как и в предыдущем случае, весьма коротко и без всяких ссылок на другие работы.

В отношении общности в постановках задач характерна следующая выписка из одного из писем Ляпунова:

«Позвольте дать Вам дружеский совет: не гонитесь за слишком большой общностью, в особенности тогда, когда благодаря ей приходится жертвовать точностью и

строгостью. При том, слишком общая постановка вопроса часто отнимает у задачи всякий интерес».

Все работы Ляпунова безупречны в отношении математической строгости и ясности. Это относится и к его работам по механике. Приведем характерную в этом отношении цитату из одной работы Ляпунова. При доказательстве существования фигур равновесия вращающейся жидкости, отличных от эллипсоидальных, Пуанкаре применял нестрогие рассуждения, и его работа по существу не решала задачи. При этом Пуанкаре писал: «Можно сделать много возражений, но в механике нельзя требовать такой же строгости, как и в чистом анализе».

Ляпунов, возражая против такой точки зрения, пишет:

«Непозволительно пользоваться сомнительными суждениями, коль скоро мы решаем определенную задачу, будь то задача механики или физики — все равно, которая поставлена совершенно определенно с точки зрения анализа. Она становится тогда задачей чистого анализа и должна трактоваться как таковая».

При изложении научного наследства Ляпунова мы будем объединять работы по их содержанию и тем самым не будем следовать хронологическому порядку. Мы не будем говорить о работах по теории потенциала и теории вероятности, ибо эти работы напечатаны в настоящем сборнике и снабжены комментариями.

Последующее изложение относится к трем направлениям научной деятельности Ляпунова: 1) устойчивость равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы; 2) существование фигур равновесия вращающейся жидкости, близких к эллипсоидальным; 3) устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости.

По первому вопросу в настоящем сборнике напечатана первая глава большой работы Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». Эта глава, содержащая постановку задачи об устойчивости и изложение общих методов

ее решения, представляет собою законченное целое. По второму вопросу напечатан мемуар «Исследование в теории фигуры небесных тел». Этот мемуар является первым по времени в большом цикле работ Ляпунова по указанному выше вопросу. Применяемые в нем методы характерны и для последующих работ.

Настоящий сборник не содержит ни одной работы по третьему из указанных выше направлений. Кроме характеристики деятельности Ляпунова по указанным трем направлениям, мы кратко изложим результаты еще некоторых отдельных его работ.

I. Устойчивость равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы

1

Наличие устойчивости изолированного положения равновесия в случае минимума потенциальной энергии (т. е. максимума функции сил) было известно еще Лагранжу. Строгое и простое доказательство этой теоремы было дано Дирихле. Результат этот связан с наличием интеграла полной энергии. Применением этой теоремы для систем с циклическими координатами Рауз установил критерии устойчивости для некоторых циклических систем. Кроме того, он дал простое обобщение теоремы Лагранжа, позволяющее судить об устойчивости по экстремумам известных интегралов.

Этот прием решения вопроса об устойчивости применим в редких случаях. Широко распространенным был прием сведения дифференциальных уравнений возмущенного движения к линейным уравнениям. При этом члены выше первого измерения относительно обобщенных координат в дифференциальных уравнениях, характеризующих возмущенное движение, отбрасывались.

Такой прием «решения по первому приближению» может приводить к неверным результатам, и не было выяснено

когда этот прием законен. Использование нескольких дальнейших членов дифференциальных уравнений не меняло существенно положения дела. Единственная попытка строгого решения вопроса устойчивости в некоторых частных случаях принадлежала Пуанкаре.

В работах Ляпунова рассмотрены дифференциальные уравнения возмущенного движения весьма общего вида. Со всей строгостью решен вопрос о том, в каких случаях рассмотрение линейных уравнений первого приближения дает полное решение задачи.

Рассмотрен ряд сомнительных случаев, когда первое приближение не дает ответа на вопрос об устойчивости. Установлено существование периодических решений для некоторых случаев нелинейных уравнений с постоянными коэффициентами. Ляпунов рассматривал и уравнения с переменными коэффициентами.

Особенно подробно были им рассмотрены уравнения с периодическими коэффициентами. Именно для периодических коэффициентов, как и для постоянных коэффициентов, он исследовал сомнительные случаи. Им впервые подробно исследован также и общий случай системы линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Ляпунов вводит новое понятие «характеристичного числа» любой функции $x(t)$, определенной для всех достаточно больших значений t. Это число характеризует поведение функции при больших t, причем за эталоны сравнения берутся функции e^{kt} при различных значениях постоянной k. Развив теорию характеристичных чисел и применив это понятие к решениям линейных систем с переменными коэффициентами, Ляпунов выделил класс так называемых «правильных систем» и подкласс «приводимых систем».

Выделение этих классов линейных систем существенно при теоретическом исследовании, в каких случаях законен прием решения задачи устойчивости «по первому приближению».

Далее Ляпунов впервые доказал теорему, обратную теореме Лагранжа — Дирихле, а именно теорему о том, что если в положении равновесия потенциальная энергия не минимальна, то при некоторых дополнительных условиях положение равновесия неустойчиво. Решение вопроса об устойчивости связано с вопросом о характеристичных числах решений линейных систем. Алгорифмическое решение этого вопроса для линейных систем с переменными коэффициентами представляет большие трудности. Ляпунов дал ряд глубоких исследований по этой задаче для линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Ценность трудов Ляпунова заключается не только в их результатах, но и в тех новых методах, которые в них даются и которые могут иметь широкое применение при решении вопросов устойчивости, что уже и оправдалось в большом числе работ, появившихся после смерти Ляпунова.

Укажем вкратце на два основных метода, применяемых Ляпуновым при исследовании устойчивости. Первый основан на интегрировании общих дифференциальных уравнений движения при помощи рядов специального вида, в частности рядов, расположенных по степеням произвольных постоянных. Широкое применение получил второй метод. Теорема Лагранжа — Дирихле использует при решении вопроса об устойчивости интеграл системы дифференциальных уравнений движения, т. е. такую функцию обобщенных координат и времени, которая сохраняет постоянное значение с течением времени для всякого движения, или, иначе говоря, такую функцию, полная производная которой во времени равна нулю в силу дифференциальных уравнений движения. В теореме Лагранжа — Дирихле такую роль играет интеграл энергии. Если считать полную энергию равной нулю в положении равновесия, то, при условии минимума потенциальной энергии в положении равновесия, полная энергия будет положительной вблизи положения равновесия. Этот факт совместно с законом сохранения

полной энергии и гарантирует устойчивость в теореме Лагранжа—Дирихле.

Ляпунов показал, что критерием устойчивости и неустойчивости может быть функция V обобщенных координат и времени и не являющаяся интегралом. Важна лишь некоторая закономерность знаков у самой функции и ее полной производной по времени, причем при вычислении последней производные от обобщенных координат по времени заменяются их выражениями из дифференциальных уравнений движения. В основных чертах в этом и заключается второй метод Ляпунова.

Построение упомянутой функции V является центральным пунктом в работе Ляпунова при решении вопросов устойчивости в различных случаях. Далее мы подробно изложим общие теоремы, в которых заключается второй метод, и методы построения функции V.

Мы только в самых общих чертах коснулись результатов и методов замечательных работ Ляпунова по устойчивости. Кроме их большой теоретической значимости надо указать и на широкие возможности применения результатов и методов этих работ в различного рода прикладных вопросах. Эти работы являются в настоящее время основными не только для математиков, но и для тех механиков и физиков, которые занимаются вопросами, связанными с колебаниями механических и физических систем.

Первой в рассматриваемом цикле является работа «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости» (1888) и последней — работа «Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques» (1902). Основной работой является докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения» (1892). Мы подробно остановимся на содержании именно этой работы. Первая глава этой работы напечатана в настоящем сборнике. Ниже мы приводим и ее содержание.

2

Пусть $Q_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые функции обобщенных координат, определяющих некоторую механическую систему, их производных по времени и самого времени. Рассматривается разность x_k значений функций Q_k в любом возмущенном движении и в некотором определенном невозмущенном движении, для которого исследуется устойчивость по отношению к величинам Q_k.

Таким путем задача устойчивости сводится к исследованию устойчивости нулевого решения

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \tag{1}$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Считается, что X_s представимы степенными рядами

$$X_s = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

по целым неотрицательным степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \geqslant 2$. Коэффициенты этих разложений так же, как и коэффициенты p_{sk}, суть вещественные, непрерывные и ограниченные функции t при $t \geqslant t_0$, и имеет место при $t \geqslant t_0$ оценка

$$|P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}| \leqslant \frac{M}{A^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}},$$

где M и A — постоянные, так что написанные ряды абсолютно сходятся при $t \geqslant t_0$, если только $|x_k| < A$.

В основу Ляпунов ставит следующее определение устойчивости невозмущенного движения: для любого заданного положительного числа ε существует такое положительное число η, что если вещественные начальные значения $x_k^{(0)}$ при $t = t_0$ величин x_k, определяемых системой (2), удовлетворяют неравенствам $|x_k^{(0)}| \leqslant \eta$, то при всяком $t > t_0$ имеют

место неравенства $|x_k| \leqslant \varepsilon (k = 1, 2, \ldots, n)$. Если для какого-либо положительного ε такого числа η нет, то имеет место неустойчивость невозмущенного движения.

Таким образом, «устойчивость по Ляпунову» есть устойчивость по отношению к возмущениям начальных данных на бесконечном промежутке времени. За начальное значение $t = t_0$ времени можно брать любое достаточно большое значение t. Ляпунов вводит еще понятие условной устойчивости, подчиняя начальные данные $x_k^{(0)}$ некоторым соотношениям. В дальнейшем мы будем говорить только о безусловной устойчивости.

Отметим еще, что, когда говорится о решениях системы (2), подразумеваются вещественные решения, удовлетворяющие условию $|x_k| < A$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Укажем определение характеристичного числа любой функции $x(t)$, определенной при $t \geqslant t_0$, причем мы будем считать эту функцию непрерывной, что несущественно. Функция $x(t)$ может принимать и комплексные значения. Характеристичным числом $x(t)$ называется такое вещественное число λ, что при любом положительном α произведение $x(t) e^{(\lambda - \alpha) t} \to 0$ при $t \to +\infty$, а произведение $x(t) e^{(\lambda + \alpha) t}$ есть неограниченная по модулю функция при $t \to +\infty$.

Если $x(t) e^{\mu t} \to 0$ при $t \to +\infty$ при любом выборе вещественного числа μ, то характеристичное число функции $x(t)$ считается равным $(+\infty)$, а если $x(t) e^{\mu t}$ при любом выборе μ есть неограниченная по модулю функция при $t \to +\infty$, то характеристичное число $x(t)$ считается равным $(-\infty)$.

Таким образом, любая функция $x(t)$ с указанными выше свойствами имеет определенное характеристичное число.

Дается ряд теорем о характеристичных числах суммы, произведения и частного функций и интеграла от функции.

Оказывается, что если $x(t)$ не обращается в нуль, то сумма характеристичных чисел $x(t)$ и $\frac{1}{x(t)}$ не больше нуля.

Характеристичным числом нескольких функций $x_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ называется наименьшее из характеристичных чисел отдельных функций $x_k(t)$.

Напишем систему первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n, \quad (s=1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

Доказывается, что всякое решение этой системы

$$x_1(t),\ x_2(t), \ldots,\ x_n(t),$$

отличное от нулевого, имеет конечное характеристичное число.

Если имеется n линейно независимых решений системы (3): $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}$ $(p=1, 2, \ldots, n)$, то каждому такому решению соответствует свое характеристичное число λ_p. Можно подобрать эти независимые решения так, чтобы сумма $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ была наибольшей.

В каждой такой «нормальной системе решений» набор характеристичных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ будет одним и тем же. При этом числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются характеристичными числами системы (3).

Для суммы $S=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ легко доказывается неравенство $S \geqslant -\mu$, где μ — характеристичное число функции

$$e^{-\int \sum\limits_{s=1}^{n} p_{ss}\,dt}$$

Если $S=-\mu$, то система (3) называется правильной.

Частным случаем правильных систем являются приводимые системы. Укажем их определение. Пусть имеется линейное преобразование функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$z_k=q_{k1}x_1+q_{k2}x_2+\ldots+q_{kn}x_n, \qquad (4)$$

причем коэффициенты этого преобразования $q_{ki}(t)$ обладают следующими свойствами: все коэффициенты $q_{ki}(t)$ и их производные по t суть непрерывные и ограниченные функ-

ции при $t \geqslant t_0$, и величина, обратная определителю, составленному из $q_{ki}(t)$, есть также ограниченная функция t.

Система (3) называется приводимой, если ее можно привести к системе с постоянными коэффициентами для z_k при помощи преобразования указанного типа.

В дальнейшем Ляпунов показывает, что если система (3) приводима, то коэффициенты q_{ki} в линейном преобразовании, приводящем ее к системе с постоянными коэффициентами, можно выбирать вещественными.

Полученная система с постоянными коэффициентами имеет те же характеристичные числа, что и приводимая система (3).

Выяснив основание понятия и определения, формулируем результаты работы Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», касающиеся решения вопроса об устойчивости по первому приближению.

В этом направлении Ляпунов доказал следующее:

Теорема 1. *Если система (3) — правильная, и у любого ее решения характеристичное число положительно, то для системы (2) имеет место устойчивость.*

Теорема 2. *Если система (3) — приводимая, и среди ее решений есть решения с отрицательным характеристичным числом, то для системы (2) имеет место неустойчивость.*

При условии теоремы 1 доказывается также, что если начальные значения $x_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ решения $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ системы (2) достаточно близки к нулю, то каждое $x_k(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, или, как пишет Ляпунов, всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему приближается.

Опишем теперь два основных метода, которые были созданы Ляпуновым и применены в его работе. Первый состоит в построении решений системы (2) в форме рядов специального вида.

Пусть система (3) правильная, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — ее характеристичные числа. Из указанных характеристичных

чисел выбираются какие-нибудь l чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, причем считается, что все эти выбранные числа положительны. Доказывается, что можно построить решения уравнений (1) в форме следующих рядов:

$$x_k = \sum L_k^{(m_1, m_2, \ldots, m_l)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_l^{m_l} e^{-\sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i t}, \qquad (5)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ — произвольные постоянные, $L_k^{(m_1, m_2, \ldots, m_l)}$ — не зависящие от α_s непрерывные функции t, характеристичные числа которых не отрицательны, и суммирование распространяется на все целые неотрицательные значения $m_1, m_2, \ldots, m_l$, такие, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_l > 0$. Доказывается, что если произвольные постоянные α_s по абсолютной величине достаточно близки к нулю, то ряды (5) абсолютно сходятся при $t \geqslant t_0$ и дают решение системы (2).

Если все характеристичные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — положительны, то можно взять $l = n$, и легко получается формулированная выше теорема об устойчивости.

Переходим теперь к изложению основ знаменитого второго метода Ляпунова. Он применим как к доказательству указанных выше теорем о решении вопроса устойчивости по первому приближению, так и при рассмотрении сомнительных случаев, когда первое приближение не решает вопроса об устойчивости.

Предварительно надо будет ввести некоторые новые определения. В дальнейшем будут рассматриваться вещественные функции V вещественных переменных t и x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, однозначные и непрерывные при значениях переменных, подчиненных неравенствам вида:

$$t \geqslant T; \quad |x_s| \leqslant H, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (6)$$

где T и H — некоторые вещественные постоянные $(H > 0)$. Кроме того, в дальнейшем считается всегда, что $V = 0$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и любом $t \geqslant T$. Функция V назы-

вается «знакопостоянной», если при некотором выборе T и H в условиях (6) она сохраняет постоянный знак. Желая указать на этот знак, говорят, что V положительна или отрицательна. Если знакопостоянная функция V не зависит от t и при подходящем выборе H обращается в нуль только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то такая функция называется «знакоопределенной» — определенно положительной или определенно отрицательной. Если V зависит от t и можно найти такую определенно положительную функцию W (не зависящую тем самым от t), что разность $V - W$ есть положительная функция, то функция V (зависящая от t) называется «определенно положительной». Если же указанным выбором W можно выражение $(-V - W)$ сделать положительным, то V называется «определенно отрицательной функцией».

Всякая функция V, которая, при некотором выборе T и H в условиях (6), остается ограниченной по абсолютной величине, называется ограниченной. Если V не зависит от t, то ограниченность V есть следствие ее непрерывности. Введем еще одно определение.

Выражение «функция V допускает бесконечно малый высший предел» равносильно следующему: при любом заданном положительном ε можно выбрать T и H в условиях (6) так, что при выполнении этих условий имеем: $|V| \leqslant \varepsilon$.

Если x_s являются решением системы (2), то можно выразить полную производную от V по t через переменные $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} Y_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} Y_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} Y_n + \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad (7)$$

где через Y_s обозначена вся правая часть s-ого уравнения системы (2). В дальнейшем V считается такой, что и V', определенная формулой (7), однозначна и непрерывна при некотором выборе T и H в условиях (6).

Кроме того, очевидно, что $V' = 0$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. В дальнейшем V' будем называть просто «производной от V».

После этих определений формулируем три теоремы Ляпунова лежащие в основе его второго метода.

Теорема 1. *Если система (2) такова, что существует знакоопределенная функция V, производная которой V' или знакопостоянная функция противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Теорема 2. *Если система (2) такова, что существует функция V со знакоопределенной производной V', допускающая бесконечно малый высший предел и такая, что при всяком t, большем некоторой величины, надлежащим выбором величин x_k, сколь угодно близких к нулю, ее можно сделать одинакового знака с V', то невозмущенное движение неустойчиво.*

Теорема 3. *Если система (2) такова, что существует ограниченная функция V, производная которой приводится к виду $V'=\lambda V+W$, где λ — положительная постоянная, а W — или тождественно равна нулю или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае при всяком t, большем некоторой величины, надлежащим выбором величины x_k, сколь угодно близких к нулю, можно сделать V одного знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Если к условиям теоремы 1 добавить еще предположения, что V допускает бесконечно малый высший предел и что V' знакоопределенна, то можно утверждать, как доказывает Ляпунов, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, ассимптотически к нему приближается.

Из изложенного ясно, что второй метод Ляпунова не связан с интегрированием системы (2). В случае теоремы Лагранжа — Дирихле V есть полная энергия, и производная V' тождественно равна нулю.

Как мы уже упоминали, центральным во втором методе является построение функции V.

Это построение осуществляется путем нахождения специальных решений некоторых линейных уравнений с частными производными. В дальнейшем мы приведем примеры построения функции V.

Если в n-мерном пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ построить семейство поверхностей $V = \text{const.}$, то производные $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ пропорциональны, как известно, направляющим косинусам нормали к указанным поверхностям, причем нормаль идет в направлении возрастания V. С другой стороны, величины Y_k, равные $\frac{dx_k}{dt}$, пропорциональны направляющим косинусам касательной к интегральной линии системы (2) в соответствующей точке n-мерного пространства, причем эта касательная направлена туда, куда движется точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при возрастании t. Если правые части уравнений системы (2) не зависят от t и функцию V также считать независящей от t, то легко понять, на основании сказанного выше, геометрический смысл условий в указанных выше теоремах второго метода, как это мы и покажем ниже.

Мы изложили в общих чертах содержание первой главы докторской диссертации Ляпунова. Отметим только, что критерий неустойчивости по первому приближению доказывается во второй главе.

3

Эта вторая глава посвящена подробному исследованию установившихся движений, т. е. тех случаев, когда коэффициенты p_{si} и $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ суть постоянные, т. е. не зависят от t. В этом случае система (3) имеет определяющее уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - k, & p_{12}, \ldots, & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22} - k, \ldots, & p_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ p_{n1}, & p_{n2}, \ldots, & p_{nn} - k \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

и характеристичные числа первого приближения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, о которых мы говорили выше, равны вещественным частям корней уравнения (8), взятым с обратным знаком. Таким образом, если вещественные части всех корней уравнения (8) отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво, и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически стремится к нему. Если же среди корней уравнения (8) имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

Приведем схему доказательства устойчивости на основе второго метода. Если вещественные части всех корней уравнения (8) отрицательны, то доказывается, что уравнение с частными производными

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \quad (9)$$

имеет решением определенно отрицательную квадратичную форму $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ее производная, в силу (9), имеет следующее выражение:

$$V' = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

Принимая во внимание, что слагаемые под знаком суммы имеют порядок выше второго, можем утверждать, что V' — определенно положительная функция, и формулированная выше первая теорема приводит к заключению об устойчивости невозмущенного движения.

В данном случае поверхности $V = C$, при отрицательных C, близких к нулю, суть замкнутые поверхности, содержащие точку $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ внутри себя. Нормаль к этим поверхностям, определяемая частными производными $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, направлена внутрь этих поверхностей, и, в силу положительности V', касательные к траекториям системы (2), направлен-

ные по возрастанию t, образуют острый угол с упомянутыми нормалями вблизи начала $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т. е. траектории проникают внутрь упомянутых выше поверхностей, что и приводит, естественно, к устойчивости.

4

Из сказанного выше следует, что первое приближение не дает ответа на вопрос о безусловной устойчивости, если среди корней уравнения (8) нет корней с положительными вещественными частями, но есть корни, равные нулю или чисто мнимые.

Такие случаи, особенно второй из них, являются существенно важными в приложениях к вопросам механики. Большая часть второй главы посвящена исследованию двух сомнительных с точки зрения первого приближения случаев.

Первым случаем является тот, когда уравнение (8) имеет один корень, равный нулю, а вещественные части остальных корней отрицательны. Вторым — тот случай, когда уравнение (8) допускает два сопряженных чисто мнимых корня $\pm\lambda i$, а вещественные части остальных корней отрицательны.

Изложим результаты, относящиеся к первому случаю.

При этом уравнения первого приближения имеют линейный интеграл. Если этот интеграл принять за одну из переменных, получается система возмущенного движения вида

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = X, \\ \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s \\ (s = 1, 2, \ldots, n),\end{gathered} \tag{10}$$

причем число зависимых переменных принимается равным не n, как раньше, а $(n+1)$. В написанных уравнениях X и X_s — голоморфные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. степенные ряды по целым неотрицательным степеням этих

переменных, сходящиеся при всех значениях этих переменных, модули которых достаточно близки к нулю. Кроме того, разложения голоморфных функций X и X_s имеют вещественные коэффициенты и начинаются с членов не ниже второго порядка. Далее p_{si} и p_s — вещественные постоянные, и уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Пусть $X^{(0)}$ и $X_s^{(0)}$ — совокупность тех членов в разложениях X и X_s, которые зависят только от x. Дальнейшее преобразование системы (10) имеет своей целью добиться следующего: все p_s равны нулю и, если $X^{(0)}$ не равна тождественно нулю, то наименьшая степень x в разложении $X^{(0)}$ не выше наименьшей степени x в разложениях $X_s^{(0)}$, а если $X^{(0)}$ отсутствует, то и все $X_s^{(0)}$ должны отсутствовать

Если система (10) не удовлетворяет этим требованиям, то из n уравнений

$$p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются как функции x:

$$x_k = u_k(x), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $u_k(x)$ — голоморфные функции x. Вводя вместо x_k новые переменные $z_k = x_k - u_k(x)$, придем для z_k к системе, которая удовлетворяет поставленным выше требованиям.

При этом задача об устойчивости по отношению к новым переменным z_k равносильна задаче об устойчивости по отношению к старым переменным x_k. Таким образом, можно считать, что система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = X,$$
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (11)$$

где p_{s1} — вещественные постоянные, причем соответствующее им определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями, а X и X_s — степен-

ные ряды с вещественными коэффициентами относительно x, x_1, $x_2, \ldots$, x_n, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка, и наименьшая степень членов, содержащих одну переменную x, в разложении X не больше степени аналогичных членов в разложениях X_s. Если же разложение X не содержит членов, зависящих только от x, то таких членов нет и в разложениях X_s. Положим сначала, что X содержит члены, зависящие только от x, и пусть gx^m есть тот из этих членов, который имеет наименьшую степень. Первая и вторая теоремы второго метода при соответствующем построении функции V показывают, что если m — число четное или m — нечетно и $g>0$, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же m — нечетно и $g<0$, то невозмущенное движение устойчиво, и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится.

Остается рассмотреть тот случай, когда X и X_s не содержат членов, не зависящих от x_1, $x_2, \ldots$, x_n, т. е. когда X и X_s обращаются в нуль при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. В этом случае система (11) имеет очевидное решение $x=C$; $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, и доказывается, что эта система имеет интеграл вида

$$x=C+f(x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ C), \tag{12}$$

где C — произвольная постоянная, $f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ C)$ — голоморфная функция своих аргументов, причем $f(x_1, x_2,\ldots, x_n, C)=0$ при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Наличие интеграла (12) является следствием следующей общей теоремы, доказанной Ляпуновым.

Теорема. *Пусть дана система уравнений с частными производными*

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+X_s)\frac{\partial z_j}{\partial x_s}=\\ =q_{j1}z_1+q_{j2}z_2+\ldots+q_{jm}z_m+Z_j,\\ (j=1,\ 2,\ldots,\ m),\end{gathered} \tag{13}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ — *голоморфные функции переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_m$, *обращающиеся в нуль, когда все эти переменные равны нулю; кроме того,* X_s *не содержат членов ниже второго порядка, а члены первого порядка в разложениях* Z_j *(если они есть) не содержат* $z_1, z_2, \ldots, z_m$. *Коэффициенты* p_{si} *и* q_{ji} *суть некоторые постоянные. Пусть далее* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — *корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} p_{11}-k, & p_{12}, \ldots, & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22}-k, \ldots, & p_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ p_{n1}, & p_{n2}, \ldots, & p_{nn}-k \end{vmatrix} = 0,$$

и $l_1, l_2, \ldots, l_m$ — *корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} q_{11}-l, & q_{12}, \ldots, & q_{1m} \\ q_{21}, & q_{22}-l, \ldots, & q_{2m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ q_{m1}, & q_{m2}, \ldots, & q_{mm}-l \end{vmatrix} = 0.$$

При этом, если вещественные части всех k_s *отличны от нуля и одного знака и если между величинами* k_s *и* l_j *не существует никаких соотношений вида*

$$t_1 k_1 + t_2 k_2 + \ldots + t_n k_n = l_j,$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — *целые неотрицательные числа, сумма которых положительна, то имеется одна определенная система голоморфных функций* $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *удовлетворяющих уравнениям (13) и обращающихся в нуль при* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Пользуясь интегралом (12), можно исключить первое из уравнений системы (11), а в остальных заменить x его выражением (12).

После этого приложение первой теоремы из второго метода для определенным образом построенной функции V покажет, что в рассматриваемом случае невозмущенное движение устойчиво, и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет асимптотически приближаться к установившемуся движению, определяемому формулами

$$x = C;\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0. \tag{14}$$

Эти установившиеся движения, при C, близких к нулю, также устойчивы.

Указанная выше общая теорема и ее обобщения применяются Ляпуновым и в ряде других случаев.

5

Весьма сложным является исследование второго сомнительного случая, когда определяющее уравнение первого приближения имеет два чисто мнимых сопряженных корня $\pm\lambda i\,(\lambda > 0)$, и вещественные части остальных корней отрицательны. Мы лишь в весьма общих чертах сможем изложить соответствующее исследование Ляпунова, в котором использован ряд чрезвычайно тонких аналитических средств.

Считается, что число переменных x_s в системе (2) равно $(n+2)$. При помощи некоторого простого преобразования переменных эта система приводится к виду

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y; \\ \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s, \\ (s = 1, 2, \ldots, n),\end{gathered} \tag{15}$$

где X, Y, X_s — голоморфные функции x, y, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, разложения которых имеют вещественные коэффициенты и начинаются с членов не ниже второго порядка.

Коэффициенты p_{si}, α_s, β_s — вещественны, и определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями.

Заменяя переменные x и y новыми, можно далее добиться того, чтобы голоморфные функции X и Y обращались в нуль при $x=y=0$. Если это не так, то находим голоморфные функции x и y переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y+X_s)\frac{\partial x}{\partial x_s}=$$
$$=-\lambda y+X;$$
$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y+X_s)\frac{\partial y}{\partial x_s}=$$
$$=\lambda x+Y.$$

Применяя некоторое простое обобщение формулированной выше теоремы о системе (13), убеждаемся в том, что эта система имеет голоморфное решение $x=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $y=v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Вводя вместо x и y новые переменные $x'=x-u$; $y'=y-v$, удовлетворим указанному выше требованию, относительно X и Y, причем вопрос об устойчивости в новых переменных равносилен вопросу об устойчивости в исходных переменных.

Таким образом, можно считать, что в уравнениях (15), кроме сказанного выше, соблюдено еще то условие, что X и Y обращаются в нуль при $x=y=0$.

Вводя вместо x и y новые переменные

$$x=r\cos\vartheta;\quad y=r\sin\vartheta, \tag{16}$$

где $r\geqslant 0$, получим

$$\frac{dr}{dt}=X\cos\vartheta+Y\sin\vartheta,\quad r\frac{d\vartheta}{dt}=\lambda r+Y\cos\vartheta-X\sin\vartheta,$$

причем, в силу сказанного выше, правые части этих уравнений обращаются в нуль при $r=0$. Таким образом, второе из написанных уравнений может быть переписано в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\lambda+\Theta, \tag{17}$$

где Θ — голоморфная функция переменных $r, x_1, x_2, \ldots, x_n$, равная нулю при $r=x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, и с коэффициентами, представляющимися в виде полиномов от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. Отсюда видно, что если $|r|$ и $|x_s|$ достаточно малы, то ϑ есть возрастающая функция t. Если же во все время движения $|r|$ и $|x_s|$ достаточно малы, то $\vartheta\to+\infty$ при $t\to+\infty$.

Следовательно, при решении вопроса устойчивости ϑ может заменить t, и наши уравнения для r и x_s, как функций ϑ, могут быть записаны в виде

$$\frac{dr}{d\vartheta}=rR,$$

$$\frac{dx_s}{d\vartheta}=q_{s1}x_1+q_{s2}x_2+\ldots+q_{sn}x_n+(a_s\cos\vartheta+b_s\sin\vartheta)r+Q_s, \tag{18}$$

$$(s=1, 2, \ldots, n),$$

где $q_{si}=\frac{p_{si}}{\lambda}$, $a_s=\frac{\alpha_s}{\lambda}$, $b_s=\frac{\beta_s}{\lambda}$, R и Q_s — голоморфные функции переменных $r, x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем разложение R не содержит свободного числа, а разложения Q_s начинаются с членов не ниже второго порядка. Коэффициенты в разложениях R и Q_s суть полиномы от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Коэффициенты q_{si}, a_s и b_s — вещественны, и определяющее уравнение для коэффициентов q_{si} имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Первоначальную задачу устойчивости можно рассматривать, как задачу устойчивости для величин $r, x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем ϑ играет роль t.

Первое из уравнений системы (18) показывает, что если начальное значение r равно нулю, то r равно нулю при всех значениях ϑ. Если же начальное значение r отлично от нуля, то r будет сохранять знак своего начального значения пока $|r|$ и $|x_s|$ достаточно малы. Принимая еще во вни-

мание формулы (16), мы можем при решении вопроса об устойчивости для системы (18) считать, что $r \geqslant 0$.

Отметим еще, что разложения R и Q_s при r и x_s, достаточно близких к нулю, сходятся равномерно по отношению к ϑ при всех вещественных ϑ, если переменные r, x_s, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ и все коэффициенты при $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ заменить их абсолютными значениями. Вместо вещественных ϑ можно брать и комплексные $\vartheta = \alpha + \beta i$, где β достаточно близко к нулю.

Пусть $R^{(0)}$ и $Q_s^{(0)}$ — совокупность членов в разложениях R и Q_s, зависящих только от r. По аналогии с изложенным выше случаем надо подвергнуть систему (18) новому преобразованию с тем, чтобы в преобразованной системе все постоянные a_s и b_s были равны нулю и чтобы было выполнено следующее условие: если $R^{(0)}$ не равно тождественно нулю, то коэффициент при наинизшей степени r в разложении $R^{(0)}$ есть постоянная, и наинизшая степень r в $R^{(0)}$ меньше наинизших степеней r в разложениях $Q_s^{(0)}$; если же $R^{(0)}$ тождественно равна нулю, то и все $Q_s^{(0)}$ тождественно равны нулю.

Преобразование системы (18) к такому виду связано с существованием периодических решений у системы (18) с периодом 2π. Переходим к построению упомянутого преобразования.

6

Строится формальное решение системы (18) следующего вида

$$\begin{aligned} r &= c + u^{(2)} c^2 + u^{(3)} c^3 + \ldots, \\ x_k &= u_k^{(1)} c + u_k^{(2)} c^2 + u_k^{(3)} c^3 + \ldots, \end{aligned} \tag{19}$$

где c — произвольная постоянная, $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ — функции от ϑ. Эти ряды подставляются в систему (18) и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях c, что приводит к дифференциальным уравнениям для $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$

$$\frac{du_k^{(1)}}{d\vartheta} = q_{k1} u_1^{(1)} + q_{k2} u_2^{(1)} + \ldots + q_{kn} u_n^{(1)} + a_k \cos\vartheta + b_k \sin\vartheta, \tag{20}$$

$$\frac{du^{(l)}}{d\vartheta} = U^{(l)},$$

$$\frac{du_k^{(l)}}{d\vartheta} = q_{k1} u_1^{(l)} + q_{k2} u_2^{(l)} + \ldots + q_{kn} u_n^{(l)} + \\ + (a_k \cos\vartheta + b_k \sin\vartheta) u^{(l)} + U_k^{(l)}, \\ (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

где $U^{(l)}$ и $U_k^{(l)}$ — полиномы от $u^{(i)}$, $u_k^{(i)}$ при $i < l$, у которых коэффициенты суть полиномы $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Решения $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ этих систем ищутся в виде конечных сумм косинусов и синусов кратных ϑ, коэффициенты при которых суть постоянные или полиномы от ϑ. В последнем случае функцию $u^{(l)}$ или $u_k^{(l)}$ назовем «вековой». Принимая во внимание, что вещественные части всех корней определяющего уравнения для коэффициентов q_{ki} отличны от нуля (отрицательны), можно утверждать, что $u_k^{(1)}$ имеют вид: $A_k \cos\vartheta + B_k \sin\vartheta$, где A_k и B_k — постоянные. Далее, первое из уравнений системы (21) при $l = 2$ даст $u^{(2)}$ при помощи квадратуры, а дальнейшие уравнения системы (21) при $l = 2$ приведут к вполне определенным выражениям для $u_k^{(2)}$, которые, как и $u^{(2)}$, не будут вековыми ни при каком выборе постоянной при определении $u^{(2)}$ квадратурой.

Дальнейший процесс вычислений аналогичен, причем будут входить произвольные постоянные при определении $u^{(l)}$ из первого из уравнений (21) при помощи квадратуры.

Функция $u^{(3)}$ может уже оказаться вековой. Но если $u^{(3)}$ не вековая функция, то такими же будут и $u_k^{(3)}$ и т. д.

Возможны, таким образом, два случая. В первом случае все функции $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ при $l < m$ оказались не вековыми, а функция $u^{(m)}$ оказалась вековой

$$u^{(m)} = g\vartheta + v, \tag{22}$$

где g — отличная от нуля постоянная, и v — конечная сумма косинусов и синусов кратных ϑ с постоянными коэффициен-

тами. Доказывается, что номер m и постоянная g не зависят от выбора произвольных постоянных, о которых мы говорили выше, и что m есть обязательно число нечетное.

Во втором случае все u и$^{(l)}$ $u_k^{(l)}$ — не вековые. Доказывается, что в этом случае ряды (19) сходятся при c, достаточно близком к нулю, если упомянутые выше произвольные постоянные определить, например, так, чтобы все $u^{(l)}$ обращались в нуль при $\vartheta = 0$. При этом эти ряды дают периодическое решение системы (18), с периодом 2π, зависящее от произвольной постоянной c.

Переходим к преобразованию системы (18), о которой мы упоминали выше. Начнем с первого случая, когда при вычислениях встретилась вековая функция (22).

Считая, что все предыдущие вычисления велись так, что $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ и v — вещественные функции ϑ, Ляпунов вводит вместо r, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ новые переменные z, z_1, $z_2, \ldots, z_n$, по формулам

$$\begin{aligned} r &= z + u^{(2)} z^2 + u^{(3)} z^3 + \ldots + u^{(m-1)} z^{m-1} + v z^m; \\ x_k &= u_k^{(1)} z + u_k^{(2)} z^2 + \ldots + u_k^{(m-1)} z^{m-1} + z_k. \end{aligned} \tag{23}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Система (18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\vartheta} &= zZ, \\ \frac{dz_s}{d\vartheta} &= q_{s1} z_1 + q_{s2} z_2 + \ldots + q_{sn} z_n + Z_s, \end{aligned} \tag{24}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где Z и Z_s — функции z, z_1, $z_2, \ldots, z_n$, со свойствами, аналогичными тем, которые имели R и X_s по отношению к r, x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Кроме того, будет иметь место следующее свойство разложений Z и Z_s: разложение Z будет содержать член gz^{m-1}, а остальные члены в разложении Z и все члены в разло-

жениях Z_s, не зависящие от $z_1, z_2, \ldots, z_n$, будут иметь степень не ниже m.

Прежняя задача устойчивости равносильна задаче устойчивости относительно $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$, причем можно считать, что $z \geqslant 0$.

Применение к системе (24) теоремы 1 и 2 второго метода показывает, что при $g > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g < 0$ оно устойчиво, и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему приближается.

Во втором случае, т. е. если ряды (19) дают периодическое решение системы (18), вместо преобразования (23), вводится преобразование

$$\begin{aligned} r &= z + u^{(2)} z^2 + u^{(3)} z^3 + \ldots, \\ x_s &= z_s + u_s^{(1)} z + u_s^{(2)} z^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{25}$$

и в системе (24) Z и Z_s обращаются в нуль при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$. В этом случае эта система допускает интеграл вида

$$z = c + f(z_1, z_2, \ldots, z_n, c, \vartheta), \tag{26}$$

где f — голоморфная функция величин $z_1, z_2, \ldots, z_n, c$, равная нулю как при $c = 0$, так и при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$. В разложении f коэффициенты суть полиномы от $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$. В данном случае доказывается, что невозмущенное движение устойчиво. Всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет ассимптотически стремиться к одному из периодических движений, определяемых равенствами $z = c$; $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$.

Эти последние движения, если $|c|$ достаточно мало, устойчивы по отношению $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$. Но эта устойчивость по отношению $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ для них не равносильна, вообще говоря, устойчивости по отношению $r, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Все эти результаты об устойчивости могут быть формулированы в терминах системы (15), что и было сделано Ляпуновым.

7

Вернемся к системе (24) и будем считать, что она получена из системы (18) при помощи преобразования (23).

Покажем, как применяется при этом Ляпуновым второй метод для доказательства устойчивости или неустойчивости сообразно знаку g. В рассматриваемом случае

$$zZ = gz^m + P^{(1)} z + P^{(2)} z^2 + \ldots + P^{(m-1)} z^{m-1} + U,$$

где $P^{(j)}$ — линейные формы величин z_k с периодическими относительно ϑ коэффициентами, и U — голоморфная функция z и z_k с такими же коэффициентами, не содержащая членов ниже третьего порядка. Разложение U в членах, линейных относительно z_k, содержит z в степенях не ниже m-ой, а в членах, не зависящих от z_k, в степенях не ниже $(m+1)$-ой.

Далее, при любом целом положительном k

$$Z_s = P_s^{(1)} z + P_s^{(2)} z^2 + \ldots + P_s^{(k)} z^k + U_s^{(k)},$$

где $P_s^{(j)}$ — линейные формы z_l с периодическими коэффициентами и $U_s^{(k)}$ — голоморфные функции z, z_l, содержащие в членах, линейных относительно z_l, степени z выше k-ой. Упомянутые периодические функции ϑ суть конечные суммы косинусов и синусов кратных ϑ.

Строится функция

$$V = z + W + U^{(1)} z + U^{(2)} z^2 + \ldots + U^{(m-1)} z^{m-1}, \qquad (27)$$

где W — квадратичная форма переменных z_l, определяемая уравнением

$$\sum_{s=1}^{n} (q_{s1} z_1 + q_{s2} z_2 + \ldots + q_{sn} z_n) \frac{\partial W}{\partial z_s} = g(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2),$$

и $U^{(j)}$ — линейные формы тех же переменных с коэффициентами — периодическими функциями ϑ. Эти линейные формы определяются уравнениями

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+q_{s2}z_2+\ldots+q_{sn}z_n)\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s}+\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \vartheta}+P^{(1)}=0,$$

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+q_{s2}z_2+\ldots+q_{sn}z_n)\frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_s}+\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \vartheta}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left(P_s^{(1)}\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial z_s}+\ldots+P_s^{(k-1)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s}\right)+P^{(k)}=0.$$

$$(k=1,2,\ldots,m-1).$$

При этом производная функции (25) по ϑ имеет вид

$$V'=g(z^m+z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2)+vz^m+\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}v_{s\sigma}z_s z_\sigma,$$

где v и $v_{s\sigma}$ — голоморфные функции z и z_l, равные нулю при $z=z_1=z_2=\ldots=z_n=0$, и с периодическими относительно ϑ коэффициентами. Отсюда, в силу $z\geqslant 0$, что вытекает из $r\geqslant 0$, и следует, что при $g<0$ к функции V применима теорема 1, а при $g>0$ — теорема 2 второго метода.

Применение второго метода к тому случаю, когда в уравнениях (24) Z и Z_s обращаются в нуль при $z_1=z_2=\ldots=$ $=z_n=0$, будет указано далее.

8

В этом последнем случае переход от системы (18) к системе (24) осуществляется при помощи преобразования (25), и ряды (19) дают при этом, как мы указали выше, периодическое решение системы (18). Тем самым получается и некоторое периодическое решение системы (15). Его можно построить непосредственно для этой системы, не переходя к новым переменным.

Пользуясь уравнением (17), можно определить период T по отношению к t, соответствующий периоду 2π по отношению к ϑ

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\lambda + \Theta} \cdot \qquad (28)$$

Совершая в функции Θ подстановку (19), можно написать следующее разложение по c:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \Theta} = 1 + \Theta_1 c + \Theta_2 c^2 + \ldots,$$

где Θ_j — конечные суммы синусов и косинусов кратных ϑ. Подстановка в (28) дает разложение

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots), \qquad (29)$$

где

$$h_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_m d\vartheta, \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$

Далее, из (17) следует

$$\vartheta + c \int_0^{\vartheta} \Theta_1 d\vartheta + c^2 \int_0^{\vartheta} \Theta_2 d\vartheta + \ldots = \lambda(t - t_0), \qquad (30)$$

где t_0 — произвольное начальное значение t. В левой части этого равенства будут содержаться члены, пропорциональные ϑ, и совокупность этих членов имеет вид $(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots)\,\vartheta$, так что уравнение (30) можно переписать так:

$$(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots)\,[\vartheta + c\,\Phi_1(\vartheta) + c^2\,\Phi_2(\vartheta) + \ldots] = \\ = \lambda(t - t_0), \qquad (31)$$

где $\Phi_j(\vartheta)$ — конечное суммы синусов и косинусов кратных ϑ.

Доказывается далее, что из этого уравнения ϑ определяется в виде ряда

$$\vartheta = \tau + \varphi_1 c + \varphi_2 c^2 + \ldots, \qquad (32)$$

где

$$\tau = \frac{2\pi (t - t_0)}{T}, \tag{33}$$

φ_m — не зависят от c и суть конечные суммы косинусов и синусов кратных τ. Внося выражение (32) в уравнения

$$\begin{aligned} x &= [c + u^{(2)} c^2 + u^{(3)} c^3 + \ldots] \cos \vartheta, \\ y &= [c + u^{(2)} c^2 + u^{(3)} c^3 + \ldots] \sin \vartheta, \\ x_k &= u_k^{(1)} c + u_k^{(2)} c^2 + u_k^{(3)} c^3 + \ldots, \\ & (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{34}$$

получим x, y, x_k в виде степенных рядов по c

$$\begin{aligned} x &= x^{(1)} c + x^{(2)} c^2 + \ldots, \\ y &= y^{(1)} c + y^{(2)} c^2 + \ldots, \\ x_k &= x_k^{(1)} c + x_k^{(2)} c^2 + \ldots, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{35}$$

Эти ряды при малом $|c|$ будут равномерно сходящимися для τ не только вещественных, но и комплексных с достаточно малой по модулю мнимой частью. Коэффициенты рядов (35) должны быть периодическими функциями τ с периодом 2π.

Для вычислений можно исходить непосредственно из системы (15). Определяется T рядом (29) с неопределенными коэффициентами h_m, в системе (15) вводится вместо t переменная τ по формуле (33), и постоянные h_m выбираются так, чтобы можно было удовлетворить системе (15) рядами (35) с периодическими по отношению τ коэффициентами. Подставляя ряды (35) в систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, получаем дифференциальные уравнения для коэффициентов рядов (35), и при надлежащем выборе h_m в рассматриваемом случае получатся коэффициенты рядов (35) в виде конечных сумм синусов и косинусов кратных τ. При этом сначала найдутся $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, а затем все $x_k^{(m)}$, как определенные частные

решения системы линейных неоднородных уравнений без резонанса.

Уравнениям для $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ можно будет удовлетворить, полагая $x^{(1)}=\cos\tau$ и $y^{(1)}=\sin\tau$ Пусть вычислены все функции $x^{(l)}$, $y^{(l)}$, $x_k^{(l)}$ при $l<m$ и все постоянные h_j при $j<m-1$. Для определения $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ получается система вида

$$\frac{dx^{(m)}}{d\tau}=-y^{(m)}-h_{m-1}\sin\tau+X^{(m)},$$

$$\frac{dy^{(m)}}{d\tau}=x^{(m)}+h_{m-1}\cos\tau+Y^{(m)},$$

где $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ — известные конечные суммы косинусов и синусов кратных τ, у которых мы выпишем только первые слагаемые

$$X^{(m)}=A_1\cos\tau+A_2\sin\tau+\ldots;\quad Y^{(m)}=B_1\cos\tau+B_2\sin\tau+\ldots.$$

Искомые $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ должны быть такого же вида

$$x^{(m)}=a_1\cos\tau+a_2\sin\tau+\ldots;\quad y^{(m)}=b_1\cos\tau+b_2\sin\tau+\ldots.$$

Для определения постоянных a_1, a_2, b_1, b_2, h_{m-1} получаются уравнения

$$a_2+b_1=A_1;\quad -a_1+b_2+h_{m-1}=A_2;$$

$$-a_2-b_1=B_2;\quad -a_1+b_2-h_{m-1}=B_1,$$

из которых следует условие разрешимости

$$A_1+B_2=0 \tag{36}$$

и

$$h_{m-1}=\frac{A_2-B_1}{2};\quad a_2=A_1-b_1;\quad b_2=\frac{A_2+B_1}{2}+a_1.$$

Все вычисления можно вести так, чтобы $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ ($m\geqslant 2$) обращались в нуль при $\tau=0$, откуда определяются a_1 и b_1.

Если бы существование рассматриваемых периодических решений было неизвестно и приложение указанного процесса привело бы при некотором m к невыполнению условия (36), то число m и постоянная

$$g = \frac{A_1 + B_2}{2}$$

были бы теми же, какие мы имели выше при решении вопроса устойчивости. Ляпунов отмечает еще, что приложимость только что указанного метода не требует, чтобы функции X и Y обращали в нуль при $x = y = 0$.

Далее, вне зависимости от задачи устойчивости, Ляпунов рассмотрел вопрос о существовании периодических решений систем уравнений при более общих предположениях.

Пусть имеется система (15).

Предполагается, что X, Y, X_s — голоморфные функции $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, не содержащие членов ниже второго порядка, и что характеристическое уравнение (8) не имеет чисто мнимых корней вида $m\lambda i$, где m — целое число (включая нуль).

При помощи подстановки

$$x = r\cos\vartheta;\ y = r\sin\vartheta;\ x_1 = rz_1;\ x_2 = rz_2;\ \ldots;\ x_n = rz_n$$

система (15) преобразуется к виду

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R;\ \frac{dz_s}{d\vartheta} = q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \ldots + q_{sn}z_n + \varphi_s r + Z_s, \quad (37)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

где φ_s — квадратичные формы $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, R и Z_s — голоморфные функции $r, z_1, z_2, \ldots, z_n$, не содержащие членов ниже второго порядка, с периодическими относительно ϑ коэффициентами. Решение системы (37) ищется в виде рядов (19). Если определение $u^{(l)}$ приводит всегда к периодическим относительно ϑ функциям, то доказывается сходимость этих рядов при малом $|c|$ в предположении, что $u^{(l)}$ равны нулю при $\vartheta = 0$. Отсюда определяется периодическое решение системы (37), представляемое в виде рядов (19).

Далее доказывается, что если система (15) допускает интеграл вида

$$x^2+y^2+F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x,\ y)=C,$$

где F — голоморфная функция своих аргументов, не содержащая вовсе членов ниже второго порядка и не содержащая x и y в членах второго порядка, если таковые имеются, то возможно построение рядов (19) с периодическими относительно ϑ коэффициентами, и, следовательно, существуют указанные выше периодические решения системы (37).

Из изложенного выше следует, что в рассматриваемом случае двух чисто мнимых корней определяющего уравнения первого приближения вопрос об устойчивости связан с построением рядов (19).

Если на конечном числе построения мы получаем вековую функцию, то задача доведена до конца. Утверждать заранее, в общем случае, существование бесконечных рядов (19) с периодическими членами невозможно.

Ляпунов указывает некоторые частные случаи, когда можно доказать существование упомянутых периодических решений.

В частности, вне связи с вопросами безусловной устойчивости, Ляпунов рассматривает вопрос о существовании периодических решений канонической системы

$$\frac{dx_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_s};\ \frac{dy_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_s},\qquad (s=1,2,\ldots,n),\qquad (38)$$

где H — голоморфная функция переменных x_k, y_k ($k=1,2,\ldots,n$), причем совокупность членов с наименьшей степенью в разложении представляет собою квадратичную форму упомянутых переменных.

Относительно системы (38) Ляпунов доказывает следующее: если определяющее уравнение, соответствующее линейным членам правых частей уравнений (38), имеет n пар чисто мнимых корней $\pm\lambda_1 i, \pm\lambda_2 i,\ldots,\pm\lambda_n i$ таких, что никакое

отношение $\lambda_p : \lambda_q (p \neq q)$ не равно целому числу, то система (38) имеет n периодических решений, каждое из которых зависит от произвольного параметра.

Отметим, что это утверждение остается справедливым, если число пар чисто мнимых корней с указанным свойством равно m, где $m < n$. При этом число периодических решений будет равно m.

Говоря о зависимости периодического решения от произвольного параметра, мы подразумеваем существенный произвольный параметр, отличный от той произвольной постоянной, которая может входить в любое решение системы в качестве слагаемого к t, поскольку правые части уравнений в рассматриваемом случае установившегося движения не содержат t.

Решение вопроса устойчивости в случае двух чисто мнимых корней у определяющего уравнения первого приближения и построение периодических решений указанных выше систем уравнений представляет собою одно из замечательнейших достижений математического анализа.

До настоящего времени ничего существенного не добавлено к тому, что было сделано Ляпуновым в этом отношении.

При нашем кратком суммарном изложении трудно, конечно, оценить ту необыкновенную силу владения математическим аппаратом и тонкость построений, которые были проявлены в работе Ляпунова по указанному вопросу.

9

В последней, третьей, главе работы «Общая задача устойчивости движения» рассматривается тот случай, когда все коэффициенты в правых частях системы (2) возмущенного движения суть периодические функции одного и того же периода ω.

Сначала рассматриваются линейные системы (3) с периодическими коэффициентами. Пусть

$$x_{1k}(t),\ x_{2k}(t), \ldots,\ x_{nk}(t), \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

— n линейно независимых решений системы (3). При этом

$$x_{1k}(t+\omega),\ x_{2k}(t+\omega),\ \ldots,\ x_{nk}(t+\omega) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

также являются решениями системы, а потому линейно выражаются через решения (39)

$$x_{ik}(t+\omega)=a_{1k}x_{i1}(t)+a_{2k}x_{i2}(t)+\ldots+a_{nk}x_{in}(t). \tag{40}$$

Уравнение n-ой степени относительно ρ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\rho, \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}-\rho \end{vmatrix}=0 \tag{41}$$

называется характеристическим уравнением системы (3) относительно периода ω. Оно не зависит от выбора системы независимых решений (39). Всякому корню ρ уравнения (41) соответствует решение системы (3) вида

$$x_1=f_1(t)\rho^{\frac{t}{\omega}};\ x_2=f_2(t)\rho^{\frac{t}{\omega}};\ldots;\ x_n=f_n(t)\rho^{\frac{t}{\omega}}, \tag{42}$$

где $f_k(t)$ — периодические функции. Говоря о периодических функциях t, мы подразумеваем, что они имеют период ω.

Кратному корню ρ, кроме решения вида (42) с периодическими функциями $f_k(t)$, могут соответствовать решения тоже вида (42), в которых $f_k(t)$ определяют формулами

$$f_k(t)=\varphi_{k0}(t)+t\varphi_{k1}(t)+\ldots+t^m\varphi_{km}(t), \tag{43}$$

где $\varphi_{ks}(t)$ — периодические функции. Всякому корню ρ кратности l соответствует l линейно независимых решений

вида (42), в которых $f_k(t)$ — периодические функции или $f_k(t)$ определяются формулами (43), где $\varphi_{ks}(t)$ — периодические функции.

Если $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — корни уравнения (41), то, определяя числа $k_s = \frac{1}{\omega} \lg \rho_s$, где берется какое-нибудь значение логарифмов, можно утверждать, что вещественные части величин $-k_1, -k_2, \ldots, -k_n$ суть характеристичные числа системы (3).

Это непосредственно вытекает из (42) и того, что $\rho^{\frac{t}{\omega}} = e^{\frac{t}{\omega} \log \rho}$.

Прежде всего Ляпунов доказывает, что система (3) в том случае, если коэффициенты $p_{sk}(t)$ имеют непрерывные производные, приводима и что коэффициенты $q_{sk}(t)$ в линейном преобразовании (4), приводящем систему (3) к системе с постоянными коэффициентами, можно всегда выбрать вещественными функциями с периодом ω или 2ω. Случай периода ω всегда возможен, если уравнение (41) не имеет отрицательных корней.

Далее довольно большой раздел третьей главы посвящен приближенному построению характеристического уравнения и его исследованию.

Приближенное построение Ляпунов основывает на следующем: если коэффициенты $p_{is}(t)$ системы (3) суть голоморфные функции некоторых параметров, то и коэффициенты уравнения (41), записанного в виде

$$\rho^n + A_1 \rho^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \rho + A_n = 0, \tag{44}$$

— также голоморфные функции упомянутых параметров.

Таким образом, можно искать коэффициенты A_s в виде степенных рядов по указанным параметрам, и это не только дает возможность приближенного вычисления A_s, но и решает

некоторые общие вопросы о характеристическом уравнении (44). Подробно рассматривается уравнение вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t)\, x = 0, \tag{45}$$

где $p(t)$ — вещественная периодическая функция периода ω. Написанное уравнение равносильно системе

$$\frac{dx}{dt} = x'; \qquad \frac{dx'}{dt} = -p(t)\, x,$$

и соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0. \tag{46}$$

Уравнение (45) заменяется уравнением с параметром

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon p(t)\, x, \tag{47}$$

причем уравнению (45) соответствует, очевидно, $\varepsilon = -1$.

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — частные решения (47), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0) = 1; \qquad \varphi'(0) = 0; \qquad \psi(0) = 0; \qquad \psi'(0) = 1,$$

то

$$\varphi(t) = 1 + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \ldots,$$
$$\psi(t) = t + \varepsilon\psi_1(t) + \varepsilon^2 \psi_2(t) + \ldots,$$

где

$$\varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t)\, \varphi_{n-1}(t)\, dt, \qquad \psi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t)\, \psi_{n-1}(t)\, dt,$$
$$\varphi_0(t) = 1, \qquad \psi_0(t) = t.$$

Коэффициент A в характеристическом уравнении (46) для дифференциального уравнения (47) выражается формулой

$$A = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(\omega) + \psi_n'(\omega)]\, \varepsilon^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varepsilon^n. \tag{48}$$

Из написанных формул вытекают, между прочим, следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если* $p(t) \leqslant 0$ *(*$p(t)$ *не тождественно равна нулю), то характеристическое уравнение* (46), *соответствующее уравнению* (45), *имеет вещественные положительные корни, из которых один больше, а другой меньше единицы* ($A^2 > 1$).

Теорема 2. *Если* $p(t) \geqslant 0$ *(*$p(t)$ *не тождественно равна нулю) и выполнено неравенство*

$$\omega \int_0^\omega p(t)\,dt \leqslant 4, \tag{49}$$

то характеристическое уравнение (46), *соответствующее уравнению* (45), *имеет мнимые сопряженные корни, по модулю равные единице* ($A^2 < 1$).

Отметим еще, что из выражений $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ следует, что $A_n \geqslant 0$ при $p(t) \geqslant 0$.

Далее Ляпунов строит пример уравнения (45) с положительным коэффициентом $p(t)$, для которого уравнение (46) имеет вещественные корни, из которых один по абсолютной величине больше единицы, а другой меньше единицы. Отметим, что если корни уравнения (46) мнимые сопряженные (оба по модулю равны единице), то, в силу формул (42), общий интеграл уравнения (45) есть ограниченная функция от t.

Если же корни уравнения (46) вещественны и различны, то уравнение имеет решения, которые не являются ограниченными функциями t.

Ляпунов рассмотрел также каноническую систему линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_s}; \qquad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_s}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и доказал, что соответствующее характеристическое уравнение есть возвратное уравнение, так что корни этого уравне-

ния распадаются на пары таких, произведение которых равно единице.

Кроме того, он рассмотрел систему вида

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = p_{s1}(t)\, x_1 + p_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n$$

с периодическими коэффициентами в предположении, что уравнение относительно μ

$$\begin{vmatrix} 2(p_{11}-\mu), & p_{12}+p_{21}, & \ldots, & p_{1n}+p_{n1} \\ p_{21}+p_{12}, & 2(p_{22}-\mu), & \ldots, & p_{2n}+p_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}+p_{1n}, & p_{n2}+p_{2n}, & \ldots, & 2(p_{nn}-\mu) \end{vmatrix} = 0, \qquad (50)$$

имеющее, как известно, только вещественные корни, не имеет ни при каком t отрицательных корней и что наименьший корень $\mu(t)$ уравнения (50) не равен тождественно нулю.

Ляпунов доказывает, что при этих предположениях характеристическое уравнение, соответствующее системе (49), имеет n корней с модулями, большими единицы, и n корней с модулями, меньшими единицы.

10

После исследования характеристического уравнения линейной системы с периодическими коэффициентами Ляпунов переходит к исследованию общей системы (2) дифференциальных уравнений возмущенного движения. Факт приводимости системы первого приближения дает на основе общих теорем первой главы те случаи, когда первое приближение решает вопрос об устойчивости. Если характеристическое уравнение (41) линейной системы первого приближения имеет все корни с модулем, меньшим единицы, то невозмущенное движение устойчиво, и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится при $t \to +\infty$. Если же упомянутое характеристи-

ческое уравнение имеет хоть один корень с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение не обладает безусловной устойчивостью.

Сомнительными в отношении суждения об устойчивости по первому приближению являются те случаи, когда характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с модулем, большим единицы, но имеет корни с модулем, равным единице. Ляпунов рассматривает два сомнительных случая, аналогичных тем, которые были им рассмотрены в главе об установившихся движениях.

В одном случае характеристическое уравнение первого приближения по предположению имеет один корень, равный единице, а остальные корни с модулями, меньшими единицы.

В другом случае упомянутое уравнение имеет два мнимых сопряженных корня с модулем, равным единице, и остальные корни с модулями, меньшими единицы. Анализ этих особых случаев в основном сходен с анализом аналогичных случаев установившегося движения. Дальше мы укажем разницу в полученных результатах.

Начнем с рассмотрения первого случая. В силу того, что система первого приближения приводима, можно при помощи линейного преобразования с периодическими коэффициентами привести систему к виду (10), где X и X_s — голоморфные функции переменных $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, коэффициенты которых суть периодические функции t (периода ω), p_s — также периодические функции и p_{si} — постоянные, причем определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями.

Пусть, как и выше, $X^{(0)}$ и $X_s^{(0)}$ — совокупность членов в разложениях X и X_s, не зависящих от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В двух случаях вопрос об устойчивости решается непосредственно по виду системы (10).

Первым является тот случай, когда член наименьшего порядка в $X^{(0)}$ имеет постоянный коэффициент; степень этого члена не выше наименьшей степени x в разложениях $X_s^{(0)}$

и все p_s равны нулю. В этом случае вопрос об устойчивости решается знаком упомянутого коэффициента в разложении $X^{(0)}$. Невозмущенное движение неустойчиво, если он положителен, и устойчиво, если он отрицателен.

Вторым случаем является тот, когда $X^{(0)}$, все $X_s^{(0)}$ и все p_s равны тождественно нулю. В этом случае система (10) имеет решения $x = c$; $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, и все эти решения (при малом $|c|$) вместе с невозмущенным движением будут устойчивыми.

Если система (10) не удовлетворяет указанным выше условиям в отношении $X^{(0)}$, $X_s^{(0)}$ и p_s, надо применить преобразование к новым переменным. Оно несколько отлично от того, которое применялось в аналогичном случае для установившегося движения.

Пытаемся решить систему (10) рядами

$$\begin{aligned} &x = c + u^{(2)} c^2 + u^{(3)} c^3 + \ldots, \\ &x_k = u_k^{(1)} c + u_k^{(2)} c^2 + u_k^{(3)} c^3 + \ldots, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{51}$$

Оказывается, что если коэффициенты этих рядов нельзя брать периодическими функциями t, то это обнаружится прежде всего на некотором коэффициенте $u^{(m)}$, который окажется вида $gt + v(t)$, где $v(t)$ — периодическая функция, а все коэффициенты $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ при $l < m$ — периодические функции t.

После этого преобразование к новым переменным $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$x = z + u^{(2)} z^2 + u^{(3)} z^3 + \ldots + u^{(m-1)} z^{m-1} + v z^m,$$

$$x_k = u_k^{(1)} z + u_k^{(2)} z^2 + u_k^{(3)} z^3 + \ldots + u_k^{(m-1)} z^{m-1} + z_k$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

приведет к системе, обладающей в отношении $X^{(0)}$, $X_s^{(0)}$ и p_s указанными свойствами, причем g будет тем постоянным коэффициентом, знак которого, как указано выше, решает вопрос об устойчивости.

Если можно все $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ брать периодическими, то ряды (51) сходятся при малом $|c|$, если считать, например, что все $u^{(l)}$ равны нулю при $t=0$.

При этом сходящиеся ряды (51) определяют непрерывный ряд периодических решений системы (10). В данном случае преобразование

$$x = z + u^{(2)} z^2 + u^{(3)} z^3 + \ldots,$$
$$x_k = z_k + u_k^{(1)} z + u_k^{(2)} z^2 + u_k^{(3)} z^3 + \ldots$$

приведет к системе, обладающей вторым из указанных выше свойств, и невозмущенное движение, вместе с построенными выше периодическими движениями, будет устойчивым.

11

Переходим к рассмотрению второго особого случая, когда характеристическое уравнение основной системы имеет два мнимых сопряженных корня с модулем, равным единице, и модули остальных корней меньше единицы. При помощи линейного преобразования с периодическими коэффициентами основная система приводится к виду (15), где X, Y, X_s — голоморфные функции $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ с членами не ниже второго порядка и с периодическими коэффициентами, α_s и β_s — периодические функции, p_{ki} — постоянные, причем определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Используя обобщение теоремы, касающейся системы уравнений (13), на случай периодических коэффициентов, можем, как и в случае установившегося движения, считать, что X и Y обращаются в нуль при $x=y=0$. Далее при помощи преобразования (16) приходим к системе

$$\frac{dr}{dt} = rR, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta,$$
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n + (\alpha_s \cos\vartheta + \beta_s \sin\vartheta) r + X_s \qquad (52)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Дальше идет некоторое изменение аппарата по сравнению со случаем установившегося движения. Величины r и x_k рассматриваются как функции независимых переменных ϑ и t, и для них пишется следующая система уравнений с частными производными

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\lambda + \Theta)\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = rR,$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial t} + (\lambda + \Theta)\frac{\partial x_s}{\partial \vartheta} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + \tag{53}$$

$$+ p_{sn}x_n + (\alpha_s \cos\vartheta + \beta_s \sin\vartheta)\, r + X_s.$$

Пытаемся решить эту систему рядами

$$\begin{aligned} r &= c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \ldots, \\ x_k &= u_k^{(1)}c + u_k^{(2)}c^2 + u_k^{(3)}c^{(3)} + \ldots, \end{aligned} \tag{54}$$

где $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ — конечные суммы косинусов и синусов кратных ϑ, причем предполагается, что $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ есть число несоизмеримое.

Оказывается, что если $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ нельзя брать периодическими функциями t, то это обнаружится прежде всего на некотором коэффициенте $u^{(m)}$, так что все $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ при $l < m$ будут периодическими, а $u^{(m)}$ будет вида $gt + v(t)$, где $v(t)$ — конечная сумма косинусов и синусов кратных ϑ с коэффициентами, которые суть периодические функции t.

Число m всегда будет нечетным, и знак g решит вопрос об устойчивости. Невозмущенное движение неустойчиво, если $g > 0$, и устойчиво, если $g < 0$. Как и раньше, числа m и g не зависят от выбора произвольных постоянных при определении $u^{(l)}$.

Положим теперь, что все коэффициенты $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ можно построить периодическими. Здесь наступает существенная разница по сравнению с установившимся движением. Оказывается, что не всегда при указанном обстоятельстве ряды (54) можно сделать сходящимися, и, вообще, исследование их сходимости представляет большие трудности.

Если предположить их сходимость, то преобразование к переменным $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ по формулам (25) приведет к системе

$$\frac{dz}{dt} = zZ; \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta;$$

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1} z_1 + p_{s2} z_2 + \ldots + p_{sn} z_n + Z_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

в которой функции Z и Z_s обращаются в нуль при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$. В этой системе отбрасывается уравнение, содержащее производную от ϑ, и для остальных уравнений доказывается следующее: для любого выбора вещественной непрерывной функции $\vartheta(t)$ при всяком заданном положительном числе ε существует положительное число η, одно и то же при всяком выборе $\vartheta(t)$, такое, что если начальные значения z, z_k удовлетворяют условиям: $|z_0| \leqslant \eta$; $|z_{k0}| \leqslant \eta$ $k = 1, 2, \ldots, n$), то при всяком t имеют место неравенства

$$|z| \leqslant \varepsilon; \quad |z_1| \leqslant \varepsilon; \quad |z_2 \leqslant \varepsilon, \ldots, \quad |z_n| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает непосредственно устойчивость невозмущенного движения. Принимая во внимание равномерную сходимость разложений Z и Z_s при всех вещественных t и ϑ (ϑ входит только под знаки косинуса и синуса), если $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ достаточно близки к нулю, можно утверждать, что высказанное выше утверждение является следствием следующей общей теоремы:

Пусть имеется система

$$\frac{dz_1}{dt} = Z_1; \qquad \frac{dz_2}{dt} = Z_2; \ldots; \frac{dz_k}{dt} = Z_k;$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{55}$$

в которой Z_j, X_s — голоморфные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_k$, равные нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, не содержащие членов ниже второго порядка,

и коэффициенты которых — ограниченные вещественные непрерывные функции t, причем разложения Z_j, X_s сходятся равномерно при всех t, если переменные достаточно близки к нулю. Коэффициенты p_{si} — вещественные постоянные такие, что определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями.

При этих предположениях для системы (55) имеет место устойчивость.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству того, что эта система допускает интегралы вида

$$L+F(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_k, t)=C, \tag{56}$$

где L — любая линейная форма $z_1, z_2, \ldots, z_k$ с постоянными коэффициентами, а F — голоморфная функция x_l, z_j, не содержащая членов ниже второго порядка и равная нулю при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, коэффициенты которой суть ограниченные функции t.

Принимая за L последовательно $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и составляя сумму квадратов этих интегралов, приходим к интегралу вида

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_k^2+R=C,$$

где R не содержит членов ниже третьего порядка. Затем составляется квадратичная форма W величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемая уравнением

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial W}{\partial x_s}=$$
$$=-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2),$$

и функция

$$V=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_k^2+W+R.$$

При этом полная производная от V по t будет иметь вид

$$V'=-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}v_{s\sigma}x_s x_\sigma,$$

где $v_{s\sigma}$ — голоморфные функции величин x_i, z_j, равные нулю, когда все эти величины равны нулю. Разложения $v_{s\sigma}$ имеют ограниченные коэффициенты и сходятся равномерно относительно t.

Построенная функция V удовлетворяет всем условиям первой теоремы второго метода, и нулевое решение системы (55) устойчиво. Всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет асимптотически стремиться к одному из движений, определяемых равенствами

$$z = c_1;\quad z_2 = c_2; \dots ; z_k = c_k;\quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

12

На этом заканчивается фундаментальный труд Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». После его опубликования Ляпунов напечатал в развитие его ряд работ. Укажем коротко их содержание. В работе «Исследования одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения» (1893) рассматривается тот случай установившегося движения, когда система состоит из двух уравнений и когда определяющее квадратное уравнение первого приближения имеет двойной корень, равный нулю. В предисловии к работе указывается, что будет рассмотрен и общий случай, когда определяющее уравнение первого приближения имеет двойной корень, равный нулю, а остальные корни — с отрицательными вещественными частями, и что этот случай приводит к особым затруднениям.

Но ни в этой, ни в какой-либо другой работе Ляпунов не рассматривал названного общего случая, и до сих пор неясно, по каким причинам это произошло.

В небольшой статье «К вопросу об устойчивости движения» (1893) Ляпунов доказывает, для случая установившегося движения, что при всяких коэффициентах p_{si} первого приближения, при которых первое приближение не решает вопроса об устойчивости, можно подобрать дополнительные

члены X_s выше первого порядка или так, чтобы имела место неустойчивость, или так, чтобы имела место устойчивость.

В работе «О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть maximum» (1897) неустойчивость равновесия доказывается в предположении, что отсутствие максимума обнаруживается рассмотрением членов второго измерения в разложении силовой функции U в ряд по переменным $x_s (s = 1, 2, \ldots, n)$, нулевые значения которых определяют положение равновесия.

13

К рассматриваемому циклу относится также ряд работ, в которых исследуются уравнения (45) и (47) с периодическим коэффициентом $p(t)$.

В большой работе 1902 г., с которой непосредственно связана заметка в «Comptes rendus» (24 декабря 1900 г.), исследуется для уравнения (45) ряд (48) при $\varepsilon = -1$ в предположении $p(t) \geqslant 0$. Если ввести обозначения

$$\int_0^t p(t)\,dt = P(t); \qquad P(\omega) = \Omega; \qquad P(t_i) = P_i,$$

то для членов упомянутого ряда получаются выражения

$$A_n = \frac{1}{2} \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} (\Omega - P_1 + P_n)(P_1 - P_2)(P_2 - P_3) \ldots (P_{n-1} - P_n)\,dt, \tag{57}$$

$$A_1 = \frac{\omega}{2}\Omega,$$

и

$$A = 1 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots, \quad (A_n > 0). \tag{58}$$

Исследование выражений (57) приводит к неравенству

$$A_n^2 > \frac{n}{n-1} A_{n-1} A_{n+1}. \qquad (59)$$

Основной результат работы заключается в следующих утверждениях:

$$\begin{aligned}
&\text{из } 2 - A_1 + A_2 - \ldots - A_{2n-1} \geqslant 0 \text{ следует } A > -1;\\
&\text{из } 2 - A_1 + A_2 - \ldots + A_{2n} \leqslant 0 \text{ следует } A < -1;\\
&\text{из } -A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2n} \leqslant 0 \text{ следует } A < 1;\\
&\text{из } -A_1 + A_2 - A_3 + \ldots - A_{2n-1} \geqslant 0 \text{ следует } A > 1.
\end{aligned} \qquad (60)$$

Считается, что написанное неравенство выполняется при каком-либо целом положительном n. Из формулированного результата вытекает прием, при помощи которого можно убедиться, в случае $A^2 \neq 1$, какое из двух неравенств $A^2 \gtrless 1$ имеет место, что, как мы видели выше, имеет основное значение при исследовании устойчивости периодических режимов. Опишем вкратце упомянутый прием.

Если $A_1 \leqslant 2$, т. е. имеет место неравенство (49), то, как мы уже упоминали, $A^2 < 1$. Если $A_1 > 2$, то вычисляется A_2 и рассматриваются отдельно следующие три случая: 1) $A_2 \leqslant A_1 - 2$; 2) $A_1 - 2 < A_2 \leqslant A_1$; 3) $A_2 > A_1$. В первом случае, в силу (60), $A < -1$, т. е. $A^2 > 1$. Во втором случае $A < 1$, и надо выяснить вопрос о неравенствах $A \gtrless -1$, для чего вычисляется A_3. Если

$$A_3 \leqslant A_2 - A_1 + 2, \qquad (61)$$

то, в силу (60), $A > -1$, т. е. окончательно $A^2 < 1$. Если $A_3 > A_2 - A_1 + 2$, то надо вычислять A_4. Если $A_2 > A_1$ и $A_3 \leqslant A_2 - A_1$, то, в силу (60), $A > 1$, т. е. $A^2 > 1$. Если же $A_2 > A_1$ и $A_3 > A_2 - A_1$, то надо вычислять A_4.

Вычисления упрощаются, если пользоваться оценками сверху чисел A_n. Пусть $A_1 > 2$ и $A_2 > A_1 - 2$. В силу (59), $A_3 \leqslant \frac{1}{2}\frac{A_2^2}{A_1}$, и, таким образом, из неравенства

$$A_2^2 - 2A_1 A_2 + 2A_1(A_1 - 2) \leqslant 0 \qquad (62)$$

следует (61), т. е. следует $A > -1$. Далее доказывается что из (62) следует и $A < 1$, т. е. $A^2 < 1$.

Далее при $n = 2$ и $n = 3$ доказывается

$$A_n \leqslant \frac{1}{(2n)!}\,\omega^n \Omega^n,$$

что приводит к неравенству $A_2 \leqslant \frac{1}{90} A_1^2$. Отсюда следует, что неравенство

$$A_2 \geqslant \frac{1}{90} A_1^3 + A_1 - 2 \qquad (63)$$

влечет за собой неравенство (61), т. е. $A > -1$. Но, как доказывается, из (63) следует также $A < 1$, т. е. $A^2 < 1$. Далее устанавливается оценка

$$A_3 \leqslant \frac{\pi^2 - 4}{6\pi^2} A_1 A_2 + \frac{15 - \pi^2}{60\pi^2} A_1^3$$

и с ее помощью доказывается, что из неравенства

$$\left(1 - \frac{\pi^2 - 4}{6\pi^2} A_1\right) A_2 \geqslant \frac{15 - \pi^2}{60\pi^2} A_1^3 + A_1 - 2$$

следует, что $A^2 < 1$.

В работе «Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами» (Сообщения Харьковского математического общества, 1896) и примыкающей к ней заметке «Comptes Rendus» (28 декабря, 1896) рассматривается задача оценки A при знакопеременной периодической функции $p(t)$. Основой исследования является преобразование уравне

ния (45) при помощи замены независимой переменной t и функции x, выбранной таким образом, чтобы в преобразованном уравнении коэффициент p был знакопостоянным. При этом для уравнения с неотрицательным $p(t)$ для доказательства неравенства $A^2 < 1$ применяется критерий (49) и следующий критерий, данный Н. Е. Жуковским (Математический сборник, т. XVI). Если a^2 и b^2 — наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $p(t)$ и выполнено условие

$$\frac{\omega}{\pi} a < E\left(\frac{\omega}{\pi} b\right) + 1, \tag{64}$$

где $E(x)$ — целая часть x, то $A^2 < 1$. Преобразование уравнения (45) совершается следующим образом.

Вместо x вводится новая функция y по формуле $x = w(t) y$, где $w(t)$ — положительная функция с периодом ω, и вместо t вводится новая независимая переменная

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{w^2(t)} .$$

Уравнение (45) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + q(\tau) y = 0, \tag{65}$$

где

$$q(\tau) = w^3(t)[w''(t) + p(t) w(t)],$$

причем $q(\tau)$ — периодическая функция, с периодом, вообще говоря, отличным от ω, и величина A для уравнения (65) та же, что и для уравнения (45). Определение w сводится к нахождению периодических решений уравнений вида $w'' + hw = h - p$, где h — некоторая постоянная. Ее надо считать равной нулю, если

$$\int_0^\omega p(t) dt = 0. \tag{66}$$

В этом последнем случае уравнение $w'' = -p$ допускает периодические решения, которые отличаются постоянным слагаемым. Указанным путем разбирается ряд примеров. Доказывается также следующее: если $p(t)$ — нечетная функция и $P(t)$ — та первообразная для $p(t)$, которая удовлетворяет условию

$$\int_0^\omega P(t)\,dt = 0,$$

то из неравенства

$$\omega \int_0^\omega P^2(t)\,dt \leqslant 4$$

следует $A^2 < 1$.

Можно, как указывает Ляпунов, несколько иначе проводить преобразование к новым переменным. Функция $w(t)$ записывается им в виде

$$w(t) = e^{-\int v(t)\,dt}$$

где $v(t)$ такая периодическая функция (имеющая производную), что

$$\int_0^\omega v(t)\,dt = 0.$$

Функция $v(t)$ определяется равенством

$$v'(t) = k[p(t) - \Omega_1], \tag{67}$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(t)\,dt,$$

и k — некоторая постоянная. При этом получается

$$q(\tau) = \{\Omega_1 + (1-k)[p(t) - \Omega_1] + v^2\}\, e^{-4\int v(t)\,dt}.$$

В данном случае можно при $p(t) > 0$ достигнуть того, что $q(\tau) > 0$ и

$$\omega_1 \int_0^{\omega_1} q(\tau)\, d\tau < \omega \int_0^{\omega} p(t)\, dt,$$

где ω_1 — период $q(\tau)$.

Рассмотрим уравнение с параметром μ

$$x'' + \mu p(t)\, x = 0, \tag{68}$$

считая $\mu > 0$, и положим в уравнении (67) $k = \mu$, не добавляя этого множителя к $p(t)$ и Ω_1. При этом $v(t) = \mu\varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} [p(t_1 + t) - \Omega_1]\, t_1\, dt_1$$

и

$$q(\tau) = \mu\, [\Omega_1 + \mu\varphi^2(t)]\, e^{-4\mu \int \varphi(t)\, dt}.$$

Если $\Omega_1 < 0$ и μ близко к нулю, то, очевидно, $A^2 > 1$ Если $\Omega_1 > 0$ и φ близко к нулю, то $A^2 < 1$. Пусть M есть наибольшее абсолютное значение $\varphi(t)$, и ξ — положительный корень уравнения

$$\left(\frac{\omega\Omega_1}{M} + \xi\right) \cdot \frac{(e^{\xi} - 1)^2}{\xi} = \pi.$$

Применяя признак Н. Е. Жуковского, Ляпунов показывает, что если $\mu \leqslant \frac{\xi}{M\omega}$, то $A^2 < 1$. В частности, при $\Omega_1 = 0$ и $\mu = 1$, из неравенства

$$\left| \int_0^{\omega} p(t_1 + t)\, t_1\, dt_1 \right| \leqslant \lg(1 + \pi)$$

следует $A^2 < 1$.

Две заметки в «Comptes Rendus» (10 апреля и 1 мая 1899 г.) посвящены исследованию уравнения (68).

В первой из них считается, что $p(t) \geqslant 0$, а во второй аналогичные вопросы рассматриваются для знакопеременного $p(t)$. Ограничимся изложением содержания первой заметки.

Пусть

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$$

собственные значения уравнения (68) при предельных условиях $y(a) = y(b) = 0$, причем $b = a + \omega$. Всякое μ_k есть непрерывная периодическая функция a периода ω или постоянная. В последнем случае μ_k есть двойной корень уравнения

$$A^2 - 1 = 0, \tag{69}$$

где A соответствует уравнению (68). Если μ_k есть функция a, (не постоянная), то она имеет один минимум μ_k' и один максимум μ_k''.

Эти числа μ_k' и μ_k'' — также корни уравнения (69). Если для постоянного μ_k мы положим $\mu_k' = \mu_k'' = \mu_k$, то все корни уравнения (69), расположенные в неубывающем порядке, будут

$$0, \mu_1', \mu_1'', \mu_2', \mu_2'', \ldots,$$

причем $\mu = 0$ есть простой корень. При нечетном k числа μ_k' и μ_k'' удовлетворяют уравнению $A + 1 = 0$, а при четном k — уравнению $A - 1 = 0$. Промежутки, определяемые числами μ_k' и μ_k'', и решают вопрос о том, какое из неравенств $A^2 \gtrless 1$ имеет место, а именно: если μ удовлетворяет условию $\mu_k' < \mu < \mu_k''$, то $A^2 > 1$; если же $\mu_k'' < \mu < \mu_{k+1}'$ или $0 < \mu < \mu_1'$, то $A^2 < 1$. Если $\mu = \mu_k'$ или $\mu = \mu_k''$, причем $\mu_k'' > \mu_k'$, то уравнение (47) имеет два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, обладающие следующим свойством:

$$x_1(t + \omega) = (-1)^k x_k(t); \qquad x_2(t + \omega) = (-1)^k x_2(t) + x_1(t).$$

Если же $\mu = \mu_k' = \mu_k''$, то имеются два линейно независимых решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ таких, что

$$x_1(t+\omega) = (-1)^k x_1(t); \qquad x_2(t+\omega) = (-1)^k x_2(t).$$

Отметим еще, что в работе «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах» исследуется устойчивость для некоторой специальной системы линейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Это связано с вычислением двух постоянных, аналогичных той постоянной A, о которой мы говорили выше.

Работы Ляпунова по устойчивости получили широкое развитие в работах советских математиков. В этих последних работах не только был получен ряд новых результатов, непосредственно продолжавших исследования Ляпунова, но и прокладывались новые пути как в отношении методов, так и в отношении постановок задач. За последние годы в Советском Союзе вышло очень большое число работ, как непосредственно связанных с исследованиями Ляпунова, так и близких к ним по темам. Мы старались полным образом представить эту литературу в прилагаемой в конце настоящего сборника библиографии. Эти новые работы по устойчивости группировались главным образом около двух центров. С одной стороны, это была Казань (Н. Г. Четаев, И. Г. Малкин, К. П. Персидский, Г. В. Каменков и др.), с другой стороны, это был Астрономический институт Московского университета (В. В. Степанов, Н. Д. Моисеев, Г. Н. Дубошин и др.).

II. Фигуры равновесия равномерно вращающейся жидкости

1

Громадный по объему и весьма сложный по применяемому математическому анализу цикл работ Ляпунова посвящен строгому доказательству существования новых фигур равновесия равномерно вращающейся вокруг некоторой оси

жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. История вопроса подробно изложена в помещенной в настоящем сборнике лекции Ляпунова «О фигуре небесных тел».

Мы начнем с перечисления всех работ этого цикла в хронологическом порядке, попутно указывая краткое содержание каждой из них.

В работе «Recherches dans la théorie de la figure des corps sélestes» (1903), публикуемой в настоящем сборнике, доказывается существование фигур равновесия, близких к сфере, в случае неоднородной жидкости, достаточно медленно вращающейся вокруг оси. Берется любой закон распределения плотности (поверхности одинаковой плотности близки к сферам) при единственном предположении, что плотность возрастает с глубиной и остается ограниченной. Задача сводится к решению цепи некоторых интегро-дифференциальных уравнений, первое из которых есть знаменитое уравнение Клеро (Клеро. Теория фигуры земли, основанная на началах гидростатики. Серия «Классики науки», изд. АН СССР, 1947).

Таким образом, в работе Ляпунова теория Клеро является первым приближением полной и строгой теории. Исследованию тех интегро-дифференциальных уравнений, о которых мы говорили выше, посвящена работа «Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planétes» (1904). В ней доказывается, что каждое из упомянутых интегро-дифференциальных уравнений имеет одно определенное решение, подчиняющееся некоторому естественному условию. Именно в этой работе Ляпунов вводит новое понятие интеграла и рассматривает обобщенное уравнение Клеро в терминах этого нового понятия интеграла, расширяя тем самым предположения об искомой функции. Оказывается далее, что полученное единственное решение этого уравнения таково, что оно удовлетворяет обобщенному уравнению Клеро и в терминах обычного интеграла Римана. Это исследование обобщенного уравнения Клеро

проводится при общих предположениях о плотности, о которых мы говорили выше.

Далее идет ряд громадных работ, посвященных гораздо более трудной задаче о существовании фигур равновесия, близких к известным эллипсоидальным фигурам равновесия, в случае однородной жидкости. Общие указания на метод исследования этой задачи и сводка полученных результатов даны в работе «Sur un probléme de Tchébychef» (1905).

Детальному изложению решения вопроса — решения, отличного от того, которое было намечено в только что указанной работе 1905 г., посвящена большая работа, состоящая из четырех частей, «Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation» (1906, 1909, 1912, 1914).

В первой части составляются основные уравнения задачи и в теоретически законченном виде указывается метод решения этих уравнений. Этот метод дает возможность не только доказать существовование новых фигур равновесия, но и определить их с любой степенью точности. Существует, как известно, два непрерывных ряда эллипсоидальных фигур равновесия: эллипсоиды вращения (эллипсоиды Маклорена) и трехосные эллипсоиды (эллипсоиды Якоби).

Число этих эллипсоидов в зависимости от угловой скорости вращения ω определяется следующим образом: существуют два значения $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_0$ $(\omega_0 > \omega_1)$ такие, что если ω удовлетворяет неравенству $0 < \omega < \omega_1$, то имеются три эллипсоидальных фигуры равновесия (два эллипсоида Маклорена и один эллипсоид Якоби), а при условии $\omega_1 \leqslant \omega < \omega_0$ имеются лишь два эллипсоида Маклорена.

При $\omega = 0$ фигурой равновесия является сфера. При $\omega = \omega_1$ эллипсоид Якоби переходит в эллипсоид вращения, а при $\omega = \omega_0$ два эллипсоида Маклорена сливаются в один. При $\omega > \omega_0$ эллипсоидальных фигур равновесия нет.

Пусть S — момент инерции жидкости относительно оси вращения и $I = S\omega$ — момент количества движения относи-

тельно той же оси. Картина изменения эллипсоидальных фигур равновесия при изменении I от нуля до бесконечности указана в напечатанной в настоящем сборнике лекции Ляпунова «О форме небесных тел». Там же указана форма вырождения эллипсоидов при приближении ω к нулю.

Из эллипсоидов Маклорена и Якоби только некоторые способны порождать близкие к ним фугуры равновесия, отличные от эллипсоидальных. В первой части проводится подробное исследование трансцендентного уравнения, которым определяются эти «эллипсоиды бифуркации». Само это уравнение получено как одно из основных уравнений задачи.

Далее в первой части указываются некоторые свойства симметрии новых фигур равновесия.

Таким образом, первая часть упомянутой работы представляет собою законченное целое. Эта первая часть одинаково относится как к фигурам равновесия, близким к эллипсоидам Маклорена, так и к фигурам, близким к эллипсоидам Якоби.

Во второй части производятся детальные вычисления тех последовательных приближений, которыми определяются новые фигуры равновесия, близкие к эллипсоидам Маклорена, и исследуется величина угловой скорости вращения и момента количества движения для этих новых фигур. В третьей части последние два вопроса исследуются для фигур равновесия, близких к эллипсоидам Якоби. Мы вернемся еще к этой третьей части в связи с результатами Ляпунова по вопросу устойчивости фигур равновесия.

В четвертой части указанной работы Ляпунов возвращается опять к основным уравнениям задачи, причем он несколько иначе, чем в первой части, вводит ту основную функцию ζ полярных углов θ и ψ, которая характеризует отклонение поверхности фигуры равновесия от эллипсоидальной формы. В процессе вычисления это приводит к формулам, отличным от формул, содержащихся в первой части работы.

Таким образом, в этой четвертой части Ляпунов дает новый метод разыскания фигур равновесия.

Функция ζ представляется в виде бесконечного ряда, и с помощью упомянутого метода Ляпунов устанавливает форму зависимости каждого члена этого ряда от θ и ψ.

В конце четвертой части указывается связь результатов применения нового метода с формулами, которые были использованы в первой части.

С четвертой частью упомянутой большой работы непосредственно связана работа «Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes d'un liquide homogène en rotation» (1916). Ляпунов в этой работе подробно исследует тот бесконечный ряд, которым определяется функция ζ, преобразует его к новому виду и таким путем устанавливает вид тех уравнений в координатах (x, y, z), которыми определяются поверхности новых фигур равновесия.

Исследовав фигуры равновесия однородной жидкости, близкие к эллипсоидальным, Ляпунов перешел к задаче об отыскании фигур равновесия слабо неоднородной жидкости, близких к эллипсоидам Маклорена или Якоби. Эта громадная работа, начатая примерно в 1915 г., была им вполне закончена. После смерти Ляпунова в его бумагах оказалась большая рукопись, содержавшая решение указанной выше задачи. Эта рукопись была издана к 200-летию Академии Наук СССР под названием «Sur certaines séries des figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation» (Partie 1, 1925; Partie 2, 1927).

В этой работе доказывается, что всякий эллипсоид Маклорена и Якоби, отличный от эллипсоида бифуркации, порождает ряд новых фигур равновесия, близких к нему по форме, со слабой неоднородностью в плотности и с тою же угловой скоростью вращения, что и у исходного эллипсоида. Если принять плотность исходного эллипсоида за единицу, то плотность новой фигуры равновесия принимается в виде $k = 1 + \delta\varphi(a)$, где δ — малый параметр и $\varphi(a)$ — заданная

функция величины a, которая характеризует поверхности уровня плотности внутри жидкости.

Основная функция ζ, характеризующая отклонение внешней поверхности и внутренних поверхностей уровня от эллипсоидов, является функцией θ, ψ и a. Она ищется в виде ряда по целым положительным степеням δ без свободного члена.

Преодолевая громадные трудности, Ляпунов исследует первые три члена упомянутого степенного ряда для ζ и, при некоторых предположениях относительно $\varphi(a)$, доказывает, какова форма зависимости любого члена этого ряда от θ, ψ и a. В конце своей работы Ляпунов применяет метод, использованный им в этой работе, к случаю однородной жидкости и, таким образом, приходит к еще одному методу исследования фигур равновесия однородной жидкости. Указание на существование этого нового метода в применении к однородной жидкости и его изложение в этом случае было опубликовано Ляпуновым еще в 1916 г. в работе «Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène».

Последняя работа Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной жидкости является исключительной по силе. В ней применяются самые разнообразные средства математического анализа.

Как и в других работах, Ляпунов, кроме строго доказанной теоремы существования, не боясь никаких трудностей, дает алгорифм построения уравнений новых фигур равновесия и исследует структуру получающихся при этом приближений.

Два результата, использованные в последней работе Ляпунова, были им предварительно опубликованы в работах: «Sur les séries des polynomes» (1915) и «Sur une formule d'analyse» (1917). В первой из них исследуется бесконечный ряд с общим членом $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\alpha^n$, где P_n — полином степени не выше n, и α — параметр ($|\alpha| < 1$). При этом $|P_n|$ при любом n не превосходят некоторого числа (оно не зависит от n), если каждое x_s ($s=1, 2, \ldots, k$) принадлежит промежутку $-1 \leqslant x_s \leqslant 1$.

Во второй работе рассматривается потенциал простого слоя на эллипсоиде и дается его разложение по сферическим функциям на подобном эллипсоиде.

В книге Л. Лихтенштейна «Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten», в которой изложение работ Ляпунова занимает большое место, написано, что эти работы читаются с большим трудом («die Arbeiten von Liapounof, ... sind auch heute nur mit grosser Mühe lesbar»).

Сам Ляпунов имел, повидимому, другие мерила трудности математических работ. В конце предисловия к первой части своей большой работы «Sur les figures d'équilibre...» он указывает, что во многом упростил первую редакцию исследования, изложенную в мемуаре «Sur un problème de Tchebychef», и пишет:

«Я надеюсь, что проблема, которая сначала казалась столь сложной, может теперь рассматриваться, по крайней мере с теоретической точки зрения, как одна из наиболее легких».

2

Трудно, не прибегая к сложным формулам, дать представление о методах, которые применял Ляпунов в своих работах о фигурах равновесия. Мы ограничимся лишь общими указаниями на эти методы и остановимся для определенности подробнее на задаче о фигурах равновесия, близких к эллипсоидальным, для случая однородной жидкости, причем мы будем придерживаться того метода, который изложен в четвертой части большой работы «Sur les figures d'équilibre...».

Преобразование подобия не играет роли при исследовании фигур равновесия. Исходя из этого, можно считать, что уравнение эллипсоида написано в виде

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=1, \qquad (1)$$

где $\rho > 0$ и $0 < q \leqslant 1$. При $q = 1$ получается эллипсоид вращения. Всякий эллипсоид вращения может служить фигурой равновесия, причем ось z является осью вращения, и всякому такому эллипсоиду соответствует определенное значение угловой скорости вращения ω.

При $q < 1$ трехосный эллипсоид (1) является фигурой равновесия вращающейся жидкости, если ρ и q связаны уравнением

$$R - Q = 0, \tag{2}$$

где

$$R = \frac{\rho}{2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{dt}{t\,\Delta(t)}; \quad Q = \frac{1}{2}(\rho + 1)(\rho + q)\int_{\rho}^{\infty}\frac{dt}{(t + q)(t + 1)\,\Delta(t)} \tag{3}$$

и

$$\Delta(t) = \sqrt{t(t + q)(t + 1)}. \tag{4}$$

Исследование уравнения (2) показывает, что всякому положительному значению ρ отвечает одно определенное положительное значение q, и при увеличении ρ от 0 до $(+\infty)$ и q увеличивается от 0 до $(+\infty)$.

В частности, при увеличении ρ от 0 до 0.514 ... q увеличивается от 0 до 1.

Переходим к общей задаче о фигурах равновесия. Пусть F — такая фигура, S — ее поверхность и

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\pi}\iiint_{F}\frac{d\tau'}{r}, \tag{5}$$

где r — расстояние от (x, y, z) до переменной точки (x', y', z'), по которой производится интегрирование. Пусть далее ω — угловая скорость вращения жидкости, k — плотность, f — постоянная в законе всемирного тяготения и

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f k}. \tag{6}$$

Задача сводится к определению тела F таким образом, чтобы на его поверхности S имело место равенство

$$U + \Omega(x^2 + y^2) = \text{const.}, \tag{7}$$

причем ось вращения принята за ось z. Отметим, что интегрирование в формуле (5) производится по искомой области F. Уравнение S ищется в виде

$$x = \sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi;\ y = \sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi;$$
$$z = \sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho}\cos\theta, \tag{8}$$

где ζ — искомая функция θ и ψ. При $\zeta = 0$ получается уравнение (1) исходного эллипсоида E_0, который является эллипсоидом Маклорена или Якоби. Пусть Ω_0 — значение Ω для E_0.

Первым существенным моментом метода является представление потенциала U тела F, ограниченного поверхностью (8), в виде бесконечного ряда

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n, \tag{9}$$

где U_n — однородные функции порядка n по отношению к ζ. Как и в работе 1903 г., это разложение получается при некоторых предположениях относительно ζ. Далее надо подставить разложение (9) в уравнение (7) и решить две задачи. Во-первых, надо найти «эллипсоиды бифуркации», те эллипсоиды, вблизи которых существуют не только эллипсоидальные фигуры со значением Ω, отличным от Ω_0, но и новые фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных. Во-вторых, надо определить функцию $\zeta(\theta, \psi)$, дающую эти новые фигуры согласно (8), и соответствующее этим фигурам значение величины Ω. Для того чтобы расчленить решение этих задач, Ляпунов заменяет уравнение (7) более общим, добавляя к его левой части лишнее слагаемое вида $L\zeta$, где L — некоторая искомая постоянная.

После решения этого обобщенного уравнения относительно ζ и L надо положить $L=0$. Это, как мы увидим дальше, приведет к уравнению для определения величин ρ и q эллипсоидов бифуркации и величины Ω, соответствующей эллипсоиду бифуркации.

После подстановки (9) и ряда преобразований обобщенное уравнение выглядит так:

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\zeta' d\sigma'}{D} = W - L\zeta + \text{const.}, \tag{10}$$

где $d\sigma' = \sin\theta' d\theta' d\psi'$, знак интеграла при $d\sigma'$ обозначает интегрирование по поверхности сферы радиуса единицы, D есть расстояние между точками (θ, ψ) и (θ', ψ') на эллипсоиде E_0, величина R определяется формулой (3),

$$W = \sum_{n=2}^{\infty} S_n,$$

$$S_n = \frac{1}{2\Delta(\rho)} U_n = \frac{1}{4\pi}\sum_{i+j=n}\frac{(n-2)!\,(-\zeta)^{j-1}}{(i-1)!\,(i+1)!\,(j-1)!}\lim_{u\to 0}\frac{d^i}{du^i}\int\frac{(\zeta'-\zeta)^{i+1}}{D(u)}\,d\sigma',$$

причем суммирование распространяется на целые положительные значения i и j, для которых $i+j=n$, а $D(u)$ есть расстояние между точками

$$\left(\frac{\sqrt{\rho+1}}{\sqrt{u+1}}\sin\theta\cos\psi,\quad \frac{\sqrt{\rho+q}}{\sqrt{u+1}}\sin\theta\sin\psi,\quad \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{u+1}}\cos\theta\right),$$

$$(\sqrt{\rho+1}\sin\theta'\cos\psi',\quad \sqrt{\rho+q}\sin\theta'\sin\psi',\quad \sqrt{\rho}\cos\theta').$$

Далее возникает еще следующая трудность. Уравнение (7) допускает тривиальные решения для ζ, которые определяют, согласно формулам (3), эллипсоидальные фигуры

равновесия, близкие к E_0, и это будет иметь место при любом выборе E_0. Чтобы избежать эту трудность, Ляпунов считает, что формулы (8) при $\zeta = 0$ определяют не исходный эллипсоид E_0, а тот эллипсоид E, который имеет ту же величину Ω (т. е. ту же угловую скорость вращения), что и искомая неэллипсоидальная фигура равновесия. В окончательных формулах надо будет вернуться к исходному эллипсоиду E_0.

Пользуясь возможностью преобразования подобия для фигур равновесия и выбирая соответственным образом начало координат на оси вращения и оси $0X$ и $0Y$, можно считать, что объем F равен объему E и что плоскости XY и XZ — суть плоскости симметрии для F. Наличие таких плоскостей симметрии было раньше доказано Ляпуновым.

После этого остается произвольным еще один параметр, и Ляпунов считает заданной величину интеграла

$$\int \zeta^2 \, d\sigma$$

и, обозначая корень квадратный из этой величины через α, ищет функцию ζ и постоянную L, входящие в уравнение (10), в виде рядов по степеням α

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \alpha^n; \qquad L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \alpha^n. \tag{11}$$

Подстановка разложения ζ в выражение W дает

$$W = \sum_{n=2}^{\infty} W_n \alpha^n,$$

причем W_n зависит только от $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$,

После подстановки разложений (11) в уравнение (10) получается последовательность линейных интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&(L_0+R)\zeta_1-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\zeta_1'\,d\sigma'}{D}=\text{const.},\\
&(L_0+R)\zeta_2-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\zeta_2'\,d\sigma'}{D}=W_2-L_1\zeta_1+\text{const.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (12)\\
&(L_0+R)\zeta_n-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\zeta_n'\,d\sigma'}{D}=\\
&=W_n-L_{n-1}\zeta_1-L_{n-2}\zeta_2-\ldots-L_1\zeta_{n-1}+\text{const.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Интегрируя обе части первого уравнения по θ и ψ, легко доказать, что постоянная, входящая в это уравнение, равна нулю, и для ζ_1 получается однородное уравнение

$$(L_0+R)\,\zeta_1=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\zeta_1'\,d\sigma'}{D}. \qquad (13)$$

В силу указанной выше симметрии F, искомые функции можно считать зависящими только от $\sin\theta\cos\psi$ и $\cos^2\theta$.

Из принятого выше условия относительно объема и определения параметра α вытекают следующие равенства:

$$\int\zeta_1\,d\sigma=0;\quad \int\zeta_1^2\,d\sigma=1, \qquad (14)$$

и вообще интегралы

$$\int\zeta_n\zeta_1\,d\sigma=M_n,\quad \int\zeta_n\,d\sigma=N_n$$

зависят только от

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_{n-1}.$$

Используя функции Ламэ, Ляпунов нашел все собственные значения и собственные функции уравнения (8) и тем самым нашел возможные значения L_0 при заданных ρ и q.

Интегрируя обе части второго из уравнений (12), можно найти постоянное слагаемое, входящее в правую часть. Это неоднородное линейное интегральное уравнение должно быть разрешимо, хотя соответствующее однородное имеет решения, отличные от нулевого

Условие разрешимости определяет постоянную L_1, после чего находится ζ_1. Аналогичные рассуждения применимы к третьему из уравнений (7) и т. д

Вычисления, относящиеся к решению линейных интегральных уравнений, были проделаны Ляпуновым вне связи с общей теорией линейных интегральных уравнений. В мемуаре 1914 г он не ссылается на эту теорию, не считая, повидимому, эти операции сколько-нибудь существенной частью работы в отношении трудности

Таким образом строятся разложения (11), и далее доказывается их сходимость, что составляет существенную часть работы. Все изложенное имело место при любом выборе эллипсоида Маклорена или Якоби E_0 и близкого к нему эллипсоида E из той же серии фигур равновесия, который был введен выше вместо эллипсоида E_0

Изменим несколько обозначения. Обозначим через $\sqrt{\bar\rho+1}$, $\sqrt{\bar\rho+\bar q}$, $\sqrt{\bar\rho}$ полуоси E и через $\sqrt{\rho+1}$, $\sqrt{\rho+q}$, $\sqrt{\rho}$ полуоси E_0.

Буквою $\bar\zeta$ обозначим то, что мы выше обозначали через ζ.

Вместо уравнений (8) мы будем иметь

$$x=\sqrt{1+\bar\zeta}\ \sqrt{\bar\rho+1}\sin\bar\theta\cos\bar\psi;\quad y=\sqrt{1+\bar\zeta}\ \sqrt{\bar\rho+\bar q}\sin\bar\theta\sin\bar\psi;$$

$$z=\sqrt{1+\bar\zeta}\cos\bar\theta,$$

где $\bar\zeta$ удовлетворяет уравнению (10).

Мы можем написать уравнение той же поверхности, отнеся ее к E_0

$$x=\sqrt{1+\zeta}\ \sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi;\quad y=\sqrt{1+\zeta}\ \sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi;$$
$$z=\sqrt{1+\zeta}\ \sqrt{\rho}\cos\theta \tag{15}$$

Сравнивая оба представления поверхности, мы получаем

$$\zeta = \zeta_0 + (1 + \zeta_0)\bar{\zeta}, \tag{16}$$

где

$$\zeta_0 = \frac{\dfrac{\bar{p}-p}{\bar{p}+1}\sin^2\theta\cos^2\psi + \dfrac{\bar{p}-p+\bar{q}-q}{\bar{p}+\bar{q}}\sin^2\theta\sin^2\psi + \dfrac{\bar{p}-p}{\bar{p}}\cos^2\theta}{\dfrac{p+1}{\bar{p}+1}\sin^2\theta\cos^2\psi + \dfrac{p+q}{\bar{p}+\bar{q}}\sin^2\theta\sin^2\psi + \dfrac{p}{\bar{p}}\cos^2\theta}.$$

Связь между углами (θ, ψ) и $(\bar{\theta}, \bar{\psi})$ выражается формулами

$$\begin{aligned} \sin\bar{\theta}\cos\bar{\psi} &= \sqrt{1+\zeta_0}\,\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{\bar{p}+1}}\sin\theta\cos\psi; \\ \sin\bar{\theta}\sin\bar{\psi} &= \sqrt{1+\zeta_0}\,\frac{\sqrt{p+q}}{\sqrt{\bar{p}+\bar{q}}}\sin\theta\sin\psi; \\ \cos\bar{\theta} &= \sqrt{1+\zeta_0}\,\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\bar{p}}}\cos\theta. \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, $\bar{\zeta}$ определяется первым разложением (11)

$$\bar{\zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\zeta}_k \alpha^k. \tag{18}$$

Формула (16) дает ζ как функцию θ, ψ, $\bar{\theta}$, $\bar{\psi}$ или, в силу (17), как функцию θ и ψ. Таким образом, решенообобщ енное уравнение (10), и решение выражено по формулам (15), т. е за исходную фигуру принят эллипсоид E_0.

Далее доказывается, что ζ_0 и $\bar{\zeta}_k$ разлагаются по целым положительным степеням η, которое определяется равенством $\Omega = \Omega_0 + \eta$, причем разложение ζ_0 не содержит члена, не зависящего от η. Таким образом, согласно (16) и (18), получаем

$$\zeta = \sum_{k+l \geqslant 1}^{\infty} \zeta_{k,l}\, \alpha^k \eta^l. \tag{19}$$

Аналогичным образом имеет место разложение

$$L = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} L_{k,\, l}\, \alpha^k \eta^l. \tag{20}$$

Доказывается сходимость этих рядов, если α и η достаточно близки к нулю, и дается прием последовательного определения коэффициентов написанных рядов.

3

Для того чтобы вернуться от обобщенного уравнения (10) к основному (7), определяющему фигуру равновесия, надо положить $L=0$, причем это равенство должно иметь место при всех α и η, близких к нулю. Тем самым элементы эллипсоидов бифуркации определяются уравнением

$$L_{0,\,0} = 0, \tag{21}$$

и устанавливается связь между α и η

$$\sum_{k+l>0} L_{k,\, l}\, \alpha^k \eta^l = 0, \tag{22}$$

причем доказывается, что коэффициент $L_{0,\,1}$ отличен от нуля, что дает возможность выразить η через α

$$\eta = h_1 \alpha + h_2 \alpha^2 + h_3 \alpha^3 + \ldots . \tag{23}$$

Подставляя это разложение в (19), получаем окончательное выражение для ζ

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \alpha^k. \tag{24}$$

В коэффициентах этого разложения ρ и q, соответствующие эллипсоиду бифуркации E_0, должны удовлетворять уравнению (21). Как мы увидим в дальнейшем, таких эллипсоидов получается бесчисленное множество.

В основе указанного выше метода лежит разложение потенциала U в ряд (9). С такого рода разложением мы встречаемся уже в первой работе из рассматриваемого цикла, а именно в работе «Recherches dans la théorie...», которая помещена в настоящем сборнике.

4

Мы изложим сейчас и аппарат, связанный с проведением описанного метода. Это изложение мы должны начать с того, чтобы привести основные определения и формулы, касающиеся функций Лямэ; мы сделаем это в тех обозначениях, которые были использованы Ляпуновым. При этом мы считаем пока $0<q<1$.

В основе теории функций Лямэ лежит дифференциальное уравнение вида

$$\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}\frac{dy}{dx}\right]+ \\ +[\beta-n(n+1)x^2]y=0, \tag{25}$$

где n — целое неотрицательное число, β — постоянный параметр. Известно, что при заданном n существует $(2n+1)$ вещественных значений параметра

$$\beta_{n,0}>\beta_{n,1}>\ldots>\beta_{n,2n}$$

таких, что при $\beta=\beta_{n,s}$ уравнение (25) имеет решение $E_{n,s}(x)$ в виде полинома от x, $\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{x^2-q}$. Более точно

$$\begin{aligned}
&E_{n,s}(x)=P(x) &&\text{при } s\equiv 0 \text{ (мод. 4)},\\
&E_{n,s}(x)=P(x)\sqrt{x^2-q} &&\text{при } s\equiv 1 \text{ (мод. 4)},\\
&E_{n,s}(x)=P(x)\sqrt{x^2-1} &&\text{при } s\equiv 2 \text{ (мод. 4)},\\
&E_{n,s}(x)=P(x)\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-q} &&\text{при } s\equiv 3 \text{ (мод. 4)},
\end{aligned}$$

где $P(x)$ — полином степени соответственно n, $n-1$, $n-1$ $n-2$.

Функции $E_{n,s}(x)$ определены с точностью до произвольного множителя. Если ввести эллиптические координаты (μ, ν), связанные с (θ, ψ) формулами

$$\sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\nu^2}=\sqrt{1-q}\sin\theta\cos\psi,$$
$$\sqrt{q-\mu^2}\,\sqrt{\nu^2-q}=\sqrt{q(1-q)}\sin\theta\sin\psi,$$
$$\mu\nu=\sqrt{q}\cos\theta,$$

то произведения $E_{n,s}(\mu)\,E_{n,s}(\nu)$ будут линейными комбинациями элементарных сферических функций $Y_{n,s}(\theta, \psi)(s=0, 1, 2, \ldots, 2n)$ порядка n. Упомянутые произведения ортогональны на поверхности единичной сферы, как функции θ и ψ.

Уравнение (25) при $\beta=\beta_{n,s}$, кроме решения $E_{n,s}(x)$, имеет еще решение $F_{n,s}(x)$, которое может быть записано в виде

$$F_{n,s}(x)=(2n+1)E_{n,s}(x)\int\limits_x^\infty \frac{dx}{[E_{n,s}(x)]^2\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}}\,. \tag{26}$$

Вводятся функции

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_{n,s}(u)=E_{n,s}(ui), \quad (i=\sqrt{-1}),\\ \mathbf{F}_{n,s}(u)=\frac{2n+1}{2}\mathbf{E}_{n,s}(u)\int\limits_u^\infty \frac{du}{[\mathbf{E}_{n,s}(u)]^2\sqrt{u(u+1)(u+q)}}\,.\end{gathered} \tag{27}$$

При этом $\mathbf{F}_{n,s}(u)$ постоянным множителем отличается от $F_{n,s}(ui)$. Далее $\mathbf{E}_{n,s}(\rho)$ и $\mathbf{F}_{n,s}(\rho)$ обозначаются просто через $\mathbf{E}_{n,s}$ и $\mathbf{F}_{n,s}$. При этих обозначениях

$$R=\frac{1}{3}\mathbf{E}_{1,0}\mathbf{F}_{1,0}, \tag{28}$$

и уравнение (2) может быть записано в виде

$$\frac{1}{3}\mathbf{E}_{1,0}\mathbf{F}_{1,0}-\frac{1}{5}\mathbf{E}_{2,3}\mathbf{F}_{2,3}=0. \tag{29}$$

Имеет место также следующая формула Лиувилля:

$$E_{n,s}(\mu)E_{n,s}(\nu)=\frac{2n+1}{4\pi\mathbf{E}_{n,s}\mathbf{F}_{n,s}}\int\frac{E_{n,s}(\mu')E_{n,s}(\nu')}{D}\,d\sigma', \qquad (30)$$

где, как и выше, D — расстояние между двумя точками эллипсоида, которым соответствуют эллиптические координаты (μ, ν) и (μ', ν').

Укажем предельный случай предыдущих формул для $q\to 1$ при некотором специальном выборе постоянного множителя при $E_{n,s}(x)$

$$\begin{aligned}&\lim_{q\to 1}E_{n,2k}(\mu)=\lim_{q\to 1}E_{n,2k-1}(\mu)=P_{n,k}(\cos\theta);\\&\lim_{q\to 1}E_{n,2k}(\nu)=\cos k\psi;\ \lim_{q\to 1}E_{n,2k-1}(\nu)=\sin k\psi,\end{aligned} \qquad (31)$$

где, как обычно,

$$P_{n,k}(x)=(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^kP_n(x)}{dx^k}$$

и $P_n(x)$ — полином Лежандра. Таким образом, в пределе произведение $E_{n,s}(\mu)E_{n,s}(\nu)$ превращается в элементарную сферическую функцию $Y_{n,s}(\theta, \psi)$. При подходящем выборе постоянного множителя у $\mathbf{E}_{n,s}(u)$ получается

$$\lim_{q\to 1}\mathbf{E}_{n,s}(u)=\mathbf{P}_{n,k}(u);\quad \lim_{q\to 1}\mathbf{F}_{n,s}(u)=\mathbf{Q}_{n,k}(u), \qquad (32)$$

где

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_{n,k}(u)=\frac{(u+1)^{\frac{k}{2}}}{2\cdot 4\ldots 2n}\left\{\frac{d^{n+k}(x^2+1)^n}{dx^{n+k}}\right\}_{x=\sqrt{u}};\\&\mathbf{Q}_{n,k}(u)=\frac{2n+1}{2}\mathbf{P}_{n,k}(u)\int_u^\infty\frac{du}{[\mathbf{P}_{n,k}(u)]^2(u+1)\sqrt{u}}.\end{aligned} \qquad (33)$$

Через $\mathbf{P}_{n,k}$ и $\mathbf{Q}_{n,k}$ обозначаются $\mathbf{P}_{n,k}(\rho)$ и $\mathbf{Q}_{n,k}(\rho)$.

5

Сравнение уравнения (13) с формулой Лиувилля (30) дает

$$L_0 = \quad R + \frac{\mathbf{E}_{n,s}\mathbf{F}_{n,s}}{2n+1} = \frac{\mathbf{E}_{n,s}\mathbf{F}_{n,s}}{2n+1} - \frac{1}{3}\mathbf{E}_{1,0}\mathbf{F}_{1,0}.$$

Величина $L_{0,0}$ есть значение L_0 при $\eta=0$, т. е. есть значение L_0 для исходного эллипсоида E_0. Вводя обозначение

$$T_{n,s} = \frac{1}{3}\mathbf{E}_{1,0}\mathbf{F}_{1,0} - \frac{\mathbf{E}_{n,s}\mathbf{F}_{n,s}}{2n+1}, \tag{34}$$

можем записать уравнение (21), определяющее эллипсоиды бифуркации, в виде

$$T_{n,s} = 0. \tag{35}$$

В случае эллипсоидов Якоби к этому уравнению надо присоединить еще уравнение (2), которое может быть записано в виде (29). Подробно исследуя величины $T_{n,s}$, Ляпунов показывает, что для эллипсоидов Якоби эллипсоиды бифуркации получаются только при $s=2n$ и $n \geqslant 2$. Таким образом, для определения ρ и q получается бесчисленное множество систем уравнений

$$T_{2,3} = 0; \quad T_{n,2n} = 0, \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{36}$$

Доказывается, что каждая такая система дает один эллипсоид бифуркации. При $n=2$ получается эллипсоид Якоби с наибольшим значением ω ($\rho = 0.514\ldots$, $q=1$). Он является эллипсоидом бифуркации лишь постольку, поскольку при уменьшении ω от него ответвляются не только эллипсоиды Якоби, но и эллипсоиды Маклорена. В дальнейшем этот эллипсоид обозначим через E_2. При $n=3$ получается эллипсоид E_3, от которого ответвляются неэллипсоидальные фигуры равновесия, которые называются грушевидными.

При увеличении n величины ρ, q и ω, соответствующие эллипсоидам бифуркации, определяемым системой (36), уменьшаются и стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Для эллипсоидов Маклорена имеется вместо системы (36) единственное уравнение для определения ρ

$$T'_{n,k} = R - \frac{1}{2n+1} \mathbf{P}_{n,k} \mathbf{Q}_{n,k} = 0, \tag{37}$$

где

$$R = \frac{1}{3} \mathbf{P}_{1,0} \mathbf{Q}_{1,0} = \sqrt{\rho} - \rho \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{\rho}.$$

Доказывается, что уравнение (37) приводит к единственному эллипсоиду бифуркации, если $n-k$ есть четное число или нуль. В остальных случаях оно не дает эллипсоидов бифуркации. Различные уравнения (37) приводят к различным эллипсоидам бифуркации. Уравнение $T'_{2,2}=0$ дает наибольшее значение $\rho = 0.514\ldots$, и соответствующий эллипсоид совпадает с E_2. Следующее по величине значение $\rho = 0.236\ldots$ получается из уравнения $T'_{3,3}=0$.

Третье по величине значение $\rho = 0.156\ldots$ получается из уравнения $T'_{2,0}=0$, и соответствующий эллипсоид есть эллипсоид Маклорена с наибольшей угловой скоростью. Он порождает, при уменьшении ω, два ряда эллипсоидов Маклорена.

Исследование уравнений (36) и (37) является обширным отделом в работах Ляпунова. В этом исследовании проявлена необыкновенная сила анализа и точность вычислений. Отметим, например, что при исследовании уравнения (37) и доказательства того, что различные уравнения (37) определяют различные ρ, применена теорема Эрмита—Линдемана о невозможности соотношения

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_n e^{\alpha_n} = 0,$$

где A_k — алгебраические числа, отличные от нуля, и α_k — различные алгебраические числа.

Укажем схему решения уравнений (12). Первое из них имеет вид (13), и сравнение с формулой (30) дает $L_0 = -T_{n,s}$ и

$$\zeta_1 = c\, E_{n,s}(\mu)\, E_{n,s}(\nu), \tag{38}$$

где c — произвольная постоянная. Переходим к определению ζ_2 из второго уравнения.

Условие ортогональности правой части второго из уравнений (12) к решению ζ_1 соответствующего однородного уравнения определяет постоянную L_1

$$L_1 = \int W_2 \zeta_1 d\sigma. \tag{39}$$

Кроме того, наличие произвольной постоянного слагаемого в упомянутой правой части приводит к такому же слагаемому в выражении ζ_2. Окончательно для ζ_2 получаем выражение вида: $\zeta_2 = \zeta_2' + c_0 + c_1 \zeta_1$, где ζ_2' — определенная функция (θ, ψ), а c_0 и c_1 — произвольные постоянные. Аналогичным образом определяются и следующие ζ_k. Произвольные постоянные определяются из добавочных условий. Указанный прием применяется, с некоторым видоизменением, при определении коэффициентов разложений (19) и (20). Ляпунов доказывает, что всякая функция $\zeta_{k,l}$ есть конечная линейная комбинация сферических функций и представляет собою полином от аргументов $\sin\theta\cos\psi$ и $\cos\theta$ степени $kn + 2l$, где n — порядок сферической функции ζ_1. В окончательных формулах надо учитывать уравнения (36) или (37) для элементов исходного эллипсоида.

Еще в первой части работы «Sur les figures d'équilibre...» Ляпунов доказал некоторые свойства симметрии полученных им неэллипсоидальных фугур. Все эти фигуры, как мы уже упоминали, имеют две плоскости симметрии — одну, перпендикулярную к оси вращения, и вторую, проходящую через эту ось. Если E_0 есть эллипсоид Маклорена и в уравнении (37) $k = 0$, то порожденные им фигуры равновесия

суть поверхности вращения относительно оси OZ. При $k \neq 0$ это не так, но через ось OZ проходит k плоскостей симметрии.

В случае эллипсоидов Якоби, если в уравнении (36) n — число четное, то через ось проходят две плоскости симметрии близкой неэллипсоидальной фигуры равновесия. При n нечетном таких плоскостей будет только одна.

В изложенных выше исследованиях, кроме малости абсолютной величины ζ, предполагается, что ζ есть однозначная функция (θ, ψ) и что отношение

$$\frac{|\zeta(\theta, \psi) - \zeta(\theta', \psi')|}{\delta},$$

где δ — расстояние между точками (θ, ψ) и (θ', ψ') единичной сферы, остается меньше некоторого достаточно малого положительного числа. В работе «Sur une classe de figures...» (1909) Ляпунов доказывает, что из малости $|\zeta|$ вытекают два указанных свойства. Таким образом, предположение о наличии этих свойств в решении задачи не умаляет общности.

6

Мы переходим к изложению содержания последней, посмертной работы Ляпунова о фигурах равновесия слабо неоднородной жидкости, близких к эллипсоидальным. Пусть E — исходный эллипсоид Якоби или Маклорена с полуосями $\sqrt{\rho+1}$, $\sqrt{\rho+q}$, $\sqrt{\rho}$, и ω — его угловая скорость вращения. Ищется фигура равновесия F неоднородной жидкости, близкая E и имеющая ту же угловую скорость ω. Плотность фигуры F берется в виде

$$k = 1 + \delta\varphi(a), \tag{40}$$

где δ — малый параметр и $\varphi(a)$ — заданная функция параметра a, определяющего поверхности уровня. Уравнение поверхностей уровня ищется в виде

$$\begin{aligned} x &= a(1+\zeta)\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi; \\ y &= a(1+\zeta)\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi; \\ z &= a(1+\zeta)\sqrt{\rho}\cos\theta, \end{aligned} \tag{41}$$

где $\zeta=\zeta(a, \theta, \psi)$ — искомая функция a, θ и ψ. Пусть внешней поверхности жидкости соответствует $a=1$, и обозначим

$$\bar{\zeta}=\bar{\zeta}(\theta, \psi)=\zeta(1, \theta, \psi). \tag{42}$$

Для определения параметра a принимается, что объем, ограниченный поверхностью, соответствующей какому-либо значению a, равен объему эллипсоида с полуосями $a\sqrt{\rho+1}$, $a\sqrt{\rho+q}$, $a\sqrt{\rho}$. Это приводит к равенству

$$\int(1+\zeta)^3 d\sigma=4\pi. \tag{43}$$

Основное уравнение задачи имеет вид

$$U+\Omega(x^2+y^2)=\sigma(a), \tag{44}$$

где

$$\Omega=\frac{\omega^2}{2f}, \quad U=\int\frac{k(N)}{r}\,d\tau,$$

r — есть расстояние от переменной точки интегрирования N до точки $M(x, y, z)$. Далее вводятся обычные обозначения

$$k'=1+\varphi(a'); \quad \zeta'=\zeta(a', \theta', \psi'); \tag{45}$$

$$r=\sqrt{(\rho+1)[a(1+\zeta)\sin\theta\cos\psi-a'(1+\zeta')\sin\theta'\cos\psi']^2+(\rho+q)[\quad]^2+\rho[\quad]^2};$$

$$r=D(a+a\zeta, a'+a'\zeta')=D[\zeta, \zeta']; \quad D(a, a')=D[0, 0]=D.$$

Предполагается, что ζ удовлетворяет следующим условиям:

$$|\zeta| < l; \quad \frac{\sqrt{p+1}\,(a+a')\,|\zeta'-\zeta|}{2D} < g, \tag{46}$$

где положительные величины l и g зависят только от δ и стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Функция $\varphi(a)$ считается невозрастающей и ζ предполагается четной функцией $a\sin\theta\cos\varphi$, $a\sin\theta\sin\psi$, $a\cos\theta$.

Для потенциала U устанавливается формула

$$\begin{aligned} U = (1+\zeta)^2 U_0 + \Delta(1+\zeta)\int\limits_0^1 k'\,da' \frac{\partial}{\partial a'} \int \frac{a'^3(\zeta'-\zeta)}{D(a, a')}\,d\sigma' + \\ + \Delta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}(1+\zeta)^{2-n} \int\limits_0^1 k'\,da' \frac{\partial}{da'} \left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \int \frac{b^2 a'^n(\zeta'-\zeta)^n}{D(a, b)}\,d\sigma'\right\}_{b=a'}, \end{aligned} \tag{47}$$

где U_0 — потенциал эллипсоида E с плотностью, выражаемой формулой (40). Разложение каждого члена формулы (47) по степеням ζ приводит к разложению U в ряд, каждый член которого есть однородная функция ζ и ζ'

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n. \tag{48}$$

Выделение параметра δ дает

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (V_n + \delta\Phi_n) = V + \delta\Phi, \tag{49}$$

где V_n и Φ_n получаются из U_n заменой k' на 1 или на $\varphi(a')$. Основное уравнение (44) приводится к виду

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{\overline{\zeta'}\,d\sigma'}{D(a, 1)} = W + g(a), \tag{50}$$

где $g(a)$ — некоторая функция a,

$$W = \frac{\Omega}{4\pi\Delta}(\rho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi)\zeta^2\sin^2\theta + \\ + \frac{1}{4\pi\Delta a^2}\Big(V_2 + V_3 + \ldots - V_2(0) + [\Phi - \Phi(0)]\delta\Big). \qquad (51)$$

$$R = \frac{\rho}{2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{dt}{t\Delta(t)},$$

а $V_2(0)$ и $\Phi(0)$ суть значения V_2 и Φ при $a=0$. Они не зависят от θ и ψ. Решение уравнения (50) ищется в виде ряда

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n\delta^n, \qquad (52)$$

причем для ζ_n получаются уравнения

$$R\zeta_n - \frac{1}{4\pi a^2}\int\frac{\zeta'_n\,d\sigma'}{D(a,1)} = W_n + g_n(a), \qquad (53)$$

где W_n — коэффициенты в разложении W по степеням δ.

Формула (43) приводит к равенствам

$$\int\zeta_1\,d\sigma = 0; \quad \int\zeta_2\,d\sigma = -\int\zeta_1^2\,d\sigma$$

и вообще

$$\int\zeta_n\,d\sigma = N_n,$$

где N_n зависит только от $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$.

Интегрируя обе части уравнения (53) по поверхности единичной сферы и принимая во внимание формулу

$$\int\frac{d\sigma}{D(a,1)} = \frac{2\pi}{a}\int_{\tau'}^{\infty}\frac{dt}{\Delta(t)},$$

где τ' — положительный корень уравнения

$$\frac{\rho+1}{\tau'+1}\sin^2\theta'\cos^2\psi'+\frac{\rho+q}{\tau'+q}\sin^2\theta'\sin^2\psi'+\frac{\rho}{\tau'}\cos^2\theta'=a^2,$$

получим

$$RN_n-\frac{1}{2a^3}\int\overline{\zeta_n'}\left[\int_{\tau'}^{\infty}\frac{dt}{\Delta(t)}\right]d\sigma'=\int W_n\,d\sigma+4\pi g_n(a),$$

откуда определяется $g_n(a)$, и уравнение (53) окончательно переписывается в виде

$$\begin{aligned}R\zeta_n-\frac{1}{4\pi a^2}\int\overline{\zeta_n'}\left[\frac{1}{D(a,1)}-\frac{1}{2a}\int_{\tau'}^{\infty}\frac{dt}{\Delta(t)}\right]d\sigma'=\\=W_n-\frac{1}{4\pi}\int W_n\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}RN_n,\end{aligned}\qquad(54)$$

причем правая часть этого уравнения зависит только от $\zeta_1,\ \zeta_2,\dots,\ \zeta_{n-1}$. Если считать эти функции известными, то уравнение (54) при $a=1$ приводит к интегральному уравнению для $\overline{\zeta_n}$

$$R\overline{\zeta_n}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\zeta_n'\,d\sigma'}{D(1,1)}=\overline{W_n}+\text{const.},\qquad(55)$$

где $\overline{W_n}$ есть W_n при $a=1$. Если удастся найти $\overline{\zeta_n}$, то $\zeta_n=\zeta_n(a,\ \theta,\ \psi)$ получится из уравнения (54).

Уравнение вида (55) было исследовано Ляпуновым в первой части его работы «Sur les figures d'équilibre...».

При решении этого уравнения существенно знать, какие из величин $T_{n,s}$ обращаются в нуль для эллипсоида E. Ляпунов предполагает, что E не есть эллипсоид бифуркации, и тем самым, если E есть эллипсоид Маклорена, то только $T_{1,0}$ обращается в нуль. Если же E есть эллипсоид Якоби,

то, кроме того, и $T_{2,3}$ равно нулю. Вводя обычные сферические функции

$$Y_{n,s}(\theta, \psi) = E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu), \qquad \text{при } q < 1,$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{n,2l}(\theta, \psi) &= P_{n,l}(\cos\theta)\cos l\psi \\ Y_{n,2l-1}(\theta, \psi) &= P_{n,l}(\cos\theta)\sin l\psi \end{aligned} \right\}, \quad \text{при } q = 1,$$

можно написать следующие условия разрешимости уравнения (55):

$$\begin{aligned} &\int \overline{W}_n Y_{1,0}\, d\sigma = 0; \quad \int \overline{W}_n Y_{2,3}\, d\sigma = 0, \text{ при } q < 1, \\ &\int \overline{W}_n Y_{1,0}\, d\sigma = 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{при } q = 1. \end{aligned} \qquad (56)$$

Эти условия выполняются сами собой в силу свойств $\overline{W}_n$. Решение уравнения (55) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\zeta}_n &= c_0 \cos\theta + c_1 \sin^2\theta \cos 2\psi + u_n, \text{ при } q < 1, \\ \overline{\zeta}_n &= c_0 \cos\theta + u_n, \qquad\qquad\qquad \text{при } q = 1, \end{aligned}$$

где u_n удовлетворяет условиям (56) при замене в них $\overline{W}_n$ на u_n, а c_0 и c_1 — произвольные постоянные. Условие конечности ζ_n при $a = 0$ приводит к $c_0 = 0$. При определенном выборе осей X и Y можно считать и $c_1 = 0$. Таким путем получаются определенные выражения для $\overline{\zeta}_n$ и $\zeta_n(a, \theta, \psi)$.

Далее при помощи анализа исключительной силы и применения самых разнообразных средств доказывается сходимость ряда (42) при $0 < a \leqslant 1$ для δ, достаточно близких к нулю; производится эффективное вычисление ζ_n и устанавливается, при некоторых предположениях относительно $\varphi(a)$, форма зависимости ζ_n от a, θ и ψ.

В частности, если $\varphi(a)$ полином от a^2 степени m, то

$$\zeta_n = Y_0 + Y_2 + \ldots + Y_{2m+2n},$$

где все Y_{2k} — сферические функции порядка $2k$ и полиномы от a^2 степени mn. Кроме того, Y_{2n+2}, $Y_{2n+4}, \ldots$, Y_{2n+2mn} делятся соответственно на a^2, $a^4, \ldots$, a^{2mn}.

В последней части работы изложенный метод применяется к случаю однородной жидкости. Этому же посвящен мемуар 1916 г., о чем мы говорили и раньше.

7

В заключение выясним основные моменты математической стороны излагаемого цикла работ и их связь с некоторыми дальнейшими работами. Будем вести изложение применительно к работе 1914 г., которую мы изложили более подробно. Первым существенным моментом, как мы уже упоминали, является разложение потенциала U в ряд (9). Далее идет решение нелинейного интегрального уравнения (10) при помощи метода последовательных приближений, что приводит к цепи линейных интегральных уравнений. Отметим, что в уравнении (10) разложение W в ряд требует определенных предположений относительно ζ. Дальше основным моментом является доказательство сходимости построенных рядов. В 1908 г., уже после первых работ Ляпунова по фигурам равновесия, Е. Шмидт опубликовал работу по общей теории нелинейных интегральных уравнений и, в частности, по разветвлению решений таких уравнений (Math. Ann., 65). В предисловии он в качестве примера приводит бифуркации фигур равновесия вращающейся жидкости, но не упоминает о работах Ляпунова, хотя уже в работах 1905 и 1906 гг. соответствующие вопросы были решены Ляпуновым. Правда, его работы относились к конкретной задаче. Но из решения этой задачи была ясна сущность метода и в общем случае. Более того, некоторые особенности в нелинейном интегральном уравнении Ляпунова, связанные с сингулярностью Ньютонова потенциала, не позволяют, строго говоря, использовать

общую теорию Е. Шмидта для решения задачи о фигурах равновесия.

Дальнейшее развитие вопроса о фигурах равновесия вращающейся жидкости мы находим главным образом в работах Л. Лихтенштейна и его учеников. Результаты этих работ изложены в книге Лихтенштейна «Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten» (Berlin, 1933).

III. Работы по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости

1

Этому вопросу посвящена магистерская диссертация Ляпунова «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (1884) и большой мемуар «Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation» (1907). Кроме того, в основной работе «Sur les figures d'équilibre....» длинный ряд вычислений связан с решением вопроса об устойчивости некоторых эллипсоидов Якоби и новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным.

До работ Ляпунова вопросом устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости занимались Лиувилль и Риман. Лиувилль опубликовал только выдержки из своих исследований. Полностью эти исследования опубликованы не были. Основываясь на опубликованных выдержках, Ляпунов считал, что Лиувилль решал вопрос об устойчивости эллипсоидов при специальных предположениях о возмущениях. То же относится и к исследованиям Римана. При общих предположениях о возмущениях Риман рассматривал лишь вопрос о неустойчивости некоторых эллипсоидов Маклорена.

Когда Ляпунов уже готовил к печати свою магистерскую диссертацию, вышло из печати новое издание книги Томсона и Тэта «Treatise on natural philosophy», в которой упо-

минается о вопросе устойчивости фигур равновесия. В качестве основы своих исследований они формулируют некоторый вариационный принцип, согласно которому можно судить об устойчивости или неустойчивости. Этот принцип Томсона и Тэта был положен в основу магистерской диссертации Ляпунова.

Основной и принципиальной частью этой работы была впервые сделанная попытка точного определения того, что надо разуметь под устойчивостью равновесия вращающейся жидкости, и приведение таким образом поставленной задачи к чисто математической задаче о минимуме некоторого выражения. Трудность задачи здесь состоит в том, что непозволительно переносить на случай сплошной среды известный критерий устойчивости Лагранжа для систем с конечным числом степеней свободы (минимум потенциальной энергии).

Работа Ляпунова представляет собою первую попытку внести ясность и строгость в решение указанной сложной задачи. По мысли автора все должно быть основано на точном определении понятия устойчивости для случая сплошной среды и на доказательстве основного вариационного принципа, базирующемся на указанном определении. Недопустимы никакие аналогии со случаем конечного числа степеней свободы.

К сожалению, и до настоящего времени эти идеи Ляпунова недостаточно оценены и не нашли полного отражения в современной литературе.

Приведем выдержку из предисловия к магистерской диссертации Ляпунова, из которой ясна его точка зрения на постановку задачи.

Говоря о трудности задачи устойчивости для сплошной среды, он далее пишет: «...все затруднение уничтожается только при том условии, если устойчивую форму равновесия определить, как такую, для которой, после сообщения движению жидкости достаточно малых возмущений, форма

жидкости остается на сколько угодно мало отличающейся от этой формы равновесия, *по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости не образуется на сколько угодно тонких нитеобразных или листообразных выступов*».

Далее Ляпунов пишет: «Это определение, выраженное в математической форме, и составляет основание всего моего исследования. Принимая его и делая некоторые предположения относительно сплошности движения, я затем пользуюсь методой Лежен — Дирихле для доказательства основной теоремы. По этой теореме всякая форма равновесия, для которой имеет место минимум Π (при известных условиях), есть устойчивая».

Величина Π выражается следующей формулой:

$$\Pi = \frac{M}{S} - \frac{1}{2\pi}\int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r} = \frac{M}{S} - V, \tag{1}$$

где M — заданная положительная постоянная, S — момент инерции жидкости относительно оси OZ (ось вращения исследуемой фигуры равновесия), а $d\tau$ и $d\tau'$ суть элементы объема, расстояние между которыми есть r, и каждое интегрирование выполняется по полному объему, занимаемому жидкостью. Постоянная M связана с моментом количества движения жидкости I относительно оси OZ формулой

$$M = \frac{I^2}{2\pi f k^3}, \tag{2}$$

где f — множитель в законе всемирного тяготения, и k — плотность жидкости. Угловая скорость ω фигуры равновесия выражается формулой

$$\omega = \frac{\sqrt{2\pi f k M}}{S}. \tag{3}$$

Считается, что жидкость несжимаема и однородна, и при сравнении величины Π для фигуры равновесия и для всех

близких фигур считается, что центр тяжести этих фигур совпадает с центром тяжести фигуры равновесия.

Принцип Томсона и Тэта, из которого исходил Ляпунов, состоял в следующем: надо установить, соответствует ли движению фигуры равновесия минимум полной энергии в предположении, что это движение сравнивается с другими движениями, происходящими при действии тех же сил взаимного притяжения и при неизменной величине момента количества движения относительно центра тяжести. Для несжимаемой однородной жидкости этот вопрос, как впервые показал Ляпунов в своей работе, равносилен указанному выше вопросу о минимуме П. Основная теорема связывает вопрос о минимуме П с вопросом об устойчивости фигуры равновесия при некотором определении понятия устойчивости. Б работе 1908 г. Ляпунов возвращается к вопросу о связи минимума П с устойчивостью и устанавливает эту связь непосредственно, без применения принципа Томсона и Тэта, а используя непосредственно закон сохранения энергии. Это будет изложено в дальнейшем.

Таким образом, принцип Томсона и Тэта не сыграл никакой роли в окончательной работе 1908 г. По существу и в магистерской диссертации в отношении постановки задачи важна лишь основная теорема, устанавливающая связь между минимумом П и устойчивостью, соответственным образом определенной.

Вернемся к магистерской диссертации. Упомянутая выше оговорка о нитеобразных и листообразных выступах при определении устойчивости связана с тем, что такие выступы могут быть большими по линейным размерам, но малыми по объему, и тем самым при больших линейных размерах они могут нести на себе малые порции энергии.

Пуанкаре в одном из своих писем к Ляпунову спрашивает его о смысле упомянутой оговорки и, получив от него разъяснение, пишет ему в ответ: «Ваши разъяснения меня полностью удовлетворили. Я вижу, что трудность, кото-

рую Вы встретили, в точности такая же, с какой столкнулся я».

Укажем вкратце на результаты магистерской диссертации. Они основаны на исследовании второй вариации $\delta^2 \Pi$ (первая вариация равна нулю для эллипсоидов равновесия). Ищутся те случаи, когда она положительна.

Оказывается, что эллипсоиды Маклорена менее сжатые, чем эллипсоид E_2, этот последний эллипсоид и сфера ($\omega = 0$) устойчивы (Π — минимум). Устойчивыми же оказываются эллипсоиды Якоби, менее вытянутые, чем эллипсоид E_3, т. е. такие, у которых угловая скорость больше угловой скорости E_3.

Эти результаты имеют место при произвольных возмущениях исходной эллипсоидальной фигуры. Ляпунов исследовал и некоторые вопросы условной устойчивости. В нашем изложении мы ограничимся вопросом о безусловной устойчивости. Специальная глава магистерской диссертации посвящена изложению новых свойств функций Лямэ.

В диссертации подчеркивается, что результаты ограничиваются лишь утверждением об устойчивости некоторых из эллипсоидальных фигур равновесия, но никак нельзя утверждать, что остальные эллипсоидальные фигуры неустойчивы. Автор говорит, что полное решение задачи может быть получено лишь путем изучения возмущенного движения. Задачу своего исследования он формулирует следующим образом: «К каким результатам относительно устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби приводит закон сохранения энергии». Мы подробно изложим исследование Π в связи с работой 1908 г.

В этой работе Ляпунов возвращается к своей магистерской диссертации и вносит в нее ряд принципиальных дополнений в отношении постановки вопроса. В ней исследуется также вопрос об устойчивости тех новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, которые были уже построены к этому времени автором.

Укажем сначала те части работы 1908 г., которые относятся к постановке задачи и общим вопросам. Они появляются в результате критики, которой подвергает Ляпунов свою прежнюю работу. Изложим сущность этой критики. Пусть F_0 — эллипсоидальная фигура равновесия, устойчивость которой исследуется. Положим для определенности, что это тело вращения, т. е. эллипсоид Маклорена. Пусть далее F — близкая (отличная от F_0) фигура, имеющая тот же объем и тот же центр тяжести, что и F_0. Пусть l_P — кратчайшее расстояние от точки P, лежащей на поверхности F, до поверхности F_0, и l — наибольшая из величин l_P, при всевозможных положениях P на F. Наличие минимума у величины Π определялось в магистерской диссертации следующим образом: существует такое положительное число α, что приращение Π при переходе от F_0 к F положительно, если только $l<\alpha$. С другой стороны, в упомянутой работе принималось, что минимум Π имеет место, если вторая вариация $\delta^2\Pi>0$ и обращается в нуль лишь при $l=0$. Это нуждается, как подробно разъясняет Ляпунов, в доказательстве. Кроме того, Ляпунов отмечает еще одно не доведенное до конца рассуждение из магистерской диссертации, относящееся не к условиям минимума, а к вопросу устойчивости. Пусть δ — объем той части фигуры F, которая находится вне F_0. В диссертации принималось, что если l меньше некоторого малого положительного числа ε, а δ имеет заданное положительное значение, то, в случае минимума Π, приращение этой величины Π имеет положительную точную нижнюю границу.

Это утверждение, как замечает Ляпунов, так же должно быть доказано. И оба эти утверждения (они называются в работе 1908 г. первым и вторым постулатами) полностью доказаны в работе 1908 г.

Следующим существенным дополнением к магистерской диссертации является исследование тех особых случаев, когда рассмотрение второй вариации не решает вопроса

о минимуме П. Когда возмущения исходной фигуры равновесия не подвержены дополнительным условиям, то особыми являются два случая: эллипсоиды E_2 и E_3. Пусть ω_1 — угловая скорость эллипсоида E_2, ω_2 — то же для E_3.

Как мы упоминали в связи с магистерской диссертацией, для эллипсоидов Якоби с угловой скоростью ω, удовлетворяющей неравенству $\omega_2 < \omega < \omega_1$, величина П имеет минимум, а при $\omega < \omega_2$ — минимума нет. При $\omega = \omega_2$ эллипсоид E_3 является эллипсоидом бифуркации, и те неэллипсоидальные фигуры равновесия, которые от него ответвляются, называются обычно грушевидными (figures pyriformes), как это уже упоминалось раньше.

При $\omega = \omega_1$ эллипсоид E_2 получается непрерывным переходом как из эллипсоидов Якоби с меньшими угловыми скоростями, так и из эллипсоидов Маклорена.

Обозначим через M_0 и M_α величину, определяемую формулой (2) для исследуемого сингулярного эллипсоида и близкого к нему тела равновесия, где α — тот параметр, о котором мы говорили при изложении работ Ляпунова о существовании не эллипсоидальных фигур равновесия, причем $\alpha = 0$ для исследуемого эллипсоида. В случае E_2 это близкое тело есть эллипсоид Якоби с меньшей угловой скоростью и в случае E_3 это близкое тело есть грушевидная фигура равновесия. В работе доказан следующий основной результат: если $M_\alpha - M_0 > 0$ при всех достаточно малых по абсолютной величине α, то П имеет минимум для исходного эллипсоида и близких к нему фигур; если же $M_\alpha - M_0 < 0$, то П не имеет минимума ни для исходного эллипсоида, ни для близких к нему фигур. Для доказательства этого предложения и исследования знака разности $M_\alpha - M_0$ существенное значение имеет разложение M по степеням параметра α. В случае E_2 сравнительно просто доказывается, что $M_\alpha - M_0 > 0$. Во втором случае разложение $M_\alpha - M_0$ по степеням α имеет вид

$$M_\alpha - M_0 = c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + \ldots .$$

Путем весьма сложных, но совершенно строгих, вычислений Ляпунов показывает, что $c_2 < 0$, т. е. $M_\alpha - M_0 < 0$. Мы будем говорить об этом подробнее ниже.

Таким образом, для грушевидных фигур равновесия и порождающего их эллипсоида E_3 величина **П** не имеет минимума. Этот совершенно точный результат Ляпунова находился в противоречии с утверждением известного английского астронома Д. Дарвина (сын знаменитого Чарльза Дарвина) об устойчивости грушевидных фигур равновесия, на чем он строил свою космогоническую гипотезу. Об этом разногласии Ляпунов пишет в работах 1905, 1907 и 1912 гг. В последней работе подробно указаны вычисления, из которых следует отрицательность коэффициента c_2.

Ляпунов говорил об этом разногласии и в своей лекции 1918 г. «О фигуре небесных тел» (она помещена в настоящем сборнике). А. Пуанкаре в своих «Leçons sur les hypothèses cosmogoniques» (1911) пишет: «Как мы говорили, грушевидная фигура может быть устойчива; но нет уверенности в том, что это действительно так. Г. Дарвин нашел, что эта фигура устойчива, но, как утверждает Ляпунов, она неустойчива. Чтобы решить вопрос до конца, надо было бы вновь начать вычисление, но это вычисление исключительно сложно».

В 1912 г., как мы уже упоминали, Ляпунов опубликовал подробно свои вычисления, и все сомнения, кто прав, должны были бы исчезнуть при внимательном чтении этой работы Ляпунова. Но ученые Западной Европы признали правоту Ляпунова только в 1917 г., когда Джинс опубликовал в «Memoirs of the Roy. Astron. Society» работу, в которой он обнаружил тот дефект в вычислениях Д. Дарвина, который привел последнего к неверному заключению об устойчивости грушевидных фигур.

В указанных двух сингулярных случаях предполагалось, что близкие фигуры сравнения при исследовании минимума **П** ничем не ограничены. Если накладывать на них дополнительные условия, то появляются среди эллипсоидов бифур-

кации новые сингулярные случаи, в которых исследование второй вариации величины П не решает вопроса о ее минимуме.

Ляпунов рассмотрел ряд случаев такого условного минимума. Если эллипсоид бифуркации есть эллипсоид Маклорена, то на близкое тело сравнения накладывается условие, что это есть тело вращения относительно оси Z или имеет симметрию вращения на угол $\frac{2\pi}{k}$, где k—некоторое целое число, большее единицы. Для эллипсоидов Якоби предполагается, что тело сравнения имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, проходящие через ось z.

Отметим еще, что, как в сингулярных случаях, так и для неэллипсоидальных фигур равновесия, Ляпунов доказывает второй из указанных выше постулатов при условии минимума П. Первый постулат не имеет смысла в сингулярных случаях.

Одна из глав работы 1908 г. посвящена доказательству вспомогательного предложения, а именно уравнения замкнутости для сферических функций. Это уравнение, как известно, состоит в том, что интеграл от квадрата функции, заданной на поверхности сферы радиуса единицы, по этой поверхности равен сумме ее коэффициентов Фурье по отношению к нормированным сферическим функциям. Это доказательство Ляпунов сообщил еще в 1897 г. в одном из заседаний Харьковского математического общества. Оно воспроизводится в работе 1908 г.

2

Мы переходим теперь к последней главе работы 1908 г., которая носит название «Заключения об устойчивости». Глава эта небольшая, но принципиально весьма важная. Приведем дословно начало этой главы:

«Мы занимались до сих пор проблемой минимума, не говоря о проблеме устойчивости, которая и привела к проблеме минимума. Естественно остановиться сейчас на проблеме устойчивости. К сожалению, мы не можем добавить ничего существенного к тому, что мы сказали по этому вопросу в мемуаре „Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия", хотя и там было сказано очень немного. Все, что мы можем сделать сейчас — это упростить анализ, проведенный в указанном мемуаре; это мы и изложим здесь, ограничиваясь, как всегда, случаем эллипсоидальных фигур равновесия и фигур, мало от них отличных».

В период времени от 1885 до 1908 г. Ляпунов создал строгую теорию устойчивости равновесия и движения для случая механических систем с конечным числом степеней свободы. В последней главе работы 1908 г. он с присущей ему всегда строгостью и точностью устанавливает связь между математической проблемой минимума и устойчивостью фигуры равновесия вращающейся жидкости. Результаты здесь оказываются гораздо менее полными, чем для механических систем с конечным числом степеней свободы, и это лежит в сути дела.

Пусть (u, v, w) — проекции скорости частиц жидкости в движении относительно центра тяжести. Положим

$$\omega S = \int (vx - uy)\, d\tau,$$

где интегрирование производится по всему объему жидкости, и правая часть постоянна в силу закона площадей. Определяем постоянную M формулой

$$M = \frac{\omega^2 S^2}{2\pi f},$$

и пусть T — живая сила в относительном движении по отношению к осям, вращающимся вокруг оси Z с угловой

скоростью ω. Уравнение сохранения энергии может быть написано в виде

$$T + \frac{\pi f M}{S} - \frac{f}{2}\int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r} = \text{const}.$$

Но

$$\Pi = \frac{M_0}{S} - \frac{1}{2\pi}\int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r}.$$

где

$$M_0 = \frac{\omega_0 S_0^2}{2\pi f},$$

и уравнение сохранения энергии может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\pi f} T + \Pi + \frac{M - M_0}{S} = \frac{1}{\pi f} T^{(0)} + \Pi^{(0)} + \frac{M - M_0}{S^{(0)}}, \tag{4}$$

где $T^{(0)}$, $\Pi^{(0)}$ и $S^{(0)}$ — начальные значения T, Π и S.

Последнее уравнение и является основным при исследовании вопроса об устойчивости исходной фигуры равновесия, Те точные термины, в которых определяется устойчивость. вводятся несколько иначе, чем в магистерской диссертации. Положим для определенности, что исходная фигура F_0, устойчивость которой исследуется, есть эллипсоид Маклорена с полуосями $\sqrt{\rho + 1}$, $\sqrt{\rho + 1}$, $\sqrt{\rho}$. Уравнение поверхности близкой фигуры F берется в виде

$$x = \sqrt{\rho + 1 + Z}\sin\theta\cos\psi;\quad y = \sqrt{\rho + 1 + Z}\sin\theta\sin\psi; \qquad z = \sqrt{\rho + Z}\cos\theta, \tag{5}$$

где Z — некоторая функция θ и ψ, которая может быть и многозначной. Она должна удовлетворять неравенству

$$Z > -\rho.$$

Буквою l обозначим наибольшее значение величины $|Z|$ и буквою δ — объем той части F, которая находится вне F_0. При заданном l величина δ имеет максимум вида $l\varphi(l)$, где $\varphi(l)$ — положительная, ограниченная функция.

Пусть l_1 и ε — заданные положительные числа, причем ε меньше всех значений $\varphi(l)$ при условии $l \leqslant l_1$ (такое положительное ε будет существовать). Если для исходной фигуры равновесия П имеет минимум, то при предположении непрерывности движения (l и δ меняются непрерывно со временем) имеет место следующее свойство: если в начальный момент времени выполнены неравенства

$$l < l_1 \tag{6}$$

и

$$\delta > \varepsilon l \tag{7}$$

и начальные возмущения скорости достаточно малы, то неравенство (6) будет выполнено, пока будет выполняться неравенство (7). Это заключение оказывается справедливым и для вязкой жидкости. Как замечает Ляпунов, вывод результата об устойчивости на основании уравнения (4) совпадает с тем выводом, который Ляпунов имел еще до окончательной редакции первой главы магистерской диссертации. Окончательная редакция этой главы оформилась под влиянием книги Томсона и Тэта. В работе 1908 г. Ляпунов пишет по этому поводу:

«Во введении к указанному мемуару я объяснил, что побудило меня сделать это изменение редакции. Но я ничего не выиграл этим в том, что касается заключений об устойчивости, и наряду с этим анализ вследствие этого сделался гораздо более сложным».

Как уже упоминалось выше, еще в предисловии к магистерской диссертации Ляпунов указывает на неполноту полученного в отношении устойчивости результата. В работе 1908 г. он еще раз подчеркивает:

« Заключения, к которым мы пришли — неполны. Но одно уравнение живых сил не может дать ничего большего, и только путем глубокого изучения всех уравнений проблемы можно надеяться получить истинное решение. Но подобное изучение еще не проведено».

Далее, в связи с работами Дюгема, Ляпунов рассматривает возможность замены величины l величиной объема δ и упоминает, что в одном из тезисов своей магистерской диссертации он формулировал следующий результат: если приращение П положительно при всех достаточно малых δ, то при всех достаточно малых начальных возмущениях величина δ будет меньше любого заданного положительного числа во все время движения. Но, как далее пишет Ляпунов, такой минимум П может иметь место только при $M=0$, т. е. для сферы ($\omega=0$). В работе «О теле наибольшего потенциала» Ляпунов показал, что если существует тело, для которого интеграл

$$\int\int\frac{d\tau\, d\tau'}{r}$$

при заданном объеме имеет абсолютный максимум, то это тело есть сфера. Если это так, то сфера является устойчивой фигурой равновесия в отношении величины δ.

Замена величины l величиной δ для фигур равновесия, отличных от сферы, не дает ничего, так как приращения S, при малых δ, могут быть сколь угодно большими. Ляпунов ставит вопрос: нельзя ли ввести другой параметр, такой, чтобы приращения S были малы, если этот параметр мал. При этом, как замечает Ляпунов, должен быть построен сначала метод, позволяющий изучать приращение П без предположения малости l. Далее он пишет:

«Но в настоящее время мы можем это сделать только при последнем предположении, так что, отбрасывая его, мы должны отказаться от всякой возможности решения проблемы минимума».

В конце работы 1908 г. Ляпунов ставит следующий вопрос: можно ли утверждать, что фигура равновесия неустойчива, если для нее П не имеет минимума? Он полагает, что для идеальной жидкости такое утверждение неправильно. Если жидкость вязкая, то, по мнению Ляпунова, указанное выше утверждение правильно, если, например, отсутствие минимума у П обнаруживается исследованием второй вариации δ^2 П. Он указывает, что для доказательства этого утверждения надо, используя его общий первый метод, указанный в работе «Общая задача об устойчивости движения», строить для уравнений возмущенного движения частные решения.

Отметим еще следующее высказывание Ляпунова об устойчивости в случае вязкой жидкости, которое находится во второй части его большой работы (1909). Оно находится в непосредственной связи с предыдущим:

«Остановимся на вопросе устойчивости рассматриваемых фигур равновесия и укажем заключения, которые дает по этому поводу принцип минимума энергии. Согласно этому принципу, если рассматриваемая жидкость есть вязкая жидкость, то фигура равновесия будет устойчивой или неустойчивой смотря по тому, будет ли полная энергия, соответствующая этой фигуре, иметь минимум или не будет иметь минимума при условии неизменности момента количества движения по отношению к центру тяжести. Хотя этот принцип никогда не был доказан удовлетворительным образом, но имеются все же основания считать его вероятным».

Как мы видели выше, Ляпунов доказал этот принцип в отношении устойчивости и для идеальной жидкости, если определять устойчивость неравенствами (6) и (7). Приведение минимумов полной энергии в движении относительно центра тяжести при заданном моменте количества движения к минимумам П было для фигур равновесия сделано еще в работе 1884 г.

3

Изложим в общих чертах тот метод, который Ляпунов применял для исследования минимума П. Для определенности мы изложим этот метод в применении к эллипсоиду Якоби E, отличному от E_2 и E_3, и пусть $\sqrt{\rho+1}$, $\sqrt{\rho+q}$, $\sqrt{\rho}$ — его полуоси, а F — фигура сравнения, уравнение которой записывается в виде (5), с заменой во второй формуле $\sqrt{\rho+1+Z}$ на $\sqrt{\rho+q+Z}$, где Z — функция θ и ψ, которая может быть и многозначной. Она считается достаточно малой по абсолютной величине.

Надо считать, что объем F равен объему E, и что центр тяжести F, как и у E, находится в начале координат. Считается еще, что оси эллипса, являющегося пересечением центрального эллипсоида инерции тела F с плоскостью XY, направлены по осям X и Y.

Переход от E к F совершается двумя этапами: от E к промежуточному телу f с тем же моментом инерции S, что и у F, и от f к F. Считается, что объем f равен объему E и что центр тяжести f находится в начале координат. Кроме того, считается, что плоскости XY и XZ — плоскости симметрии тела f. Еще одно дополнительное условие относительно f будет указано ниже. Функцию $Z=\zeta$ для f считаем однозначной, непрерывной и малой по абсолютному значению.

Приращение П при переходе от E к f обозначается через $\Delta_1 \Pi$, и при переходе от f к F — через $\Delta_2 \Pi$, так что

$$\Delta\Pi = \Delta_1 \Pi + \Delta_2 \Pi,$$

где

$$\Delta_1 \Pi = \frac{M}{S} - \frac{M}{S_0} - \Delta_1 V; \qquad \Delta_2 \Pi = -\Delta_2 V,$$

где S_0 — значение S для E. Пусть $\lambda = \max|Z-\zeta|$; $l = \max|\zeta|$, причем считается, что $\lambda + l < \rho$, и $L = \max|Z|$.

Пусть $\tau(\theta, \varphi)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int \tau d\sigma = \int \tau \sin\theta \cos\psi \, d\sigma = \int \tau \sin\theta \sin\psi d\sigma =$$
$$= \int \tau \cos\theta d\sigma = \int \tau \Gamma \, d\sigma,$$

где

$$\Gamma = (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) \sin^2\theta - \frac{1}{3}(2\rho + t + q).$$

Кроме того, ставим еще одно условие, которое является следствием неформулированного дополнительного условия относительно f

$$\int \tau \sin^2\theta \sin 2\psi \, d\sigma = 0.$$

Для $\Delta_2 \Pi$ Ляпунов получает выражение вида

$$\Delta_2 \Pi = \frac{1}{2}\left[R \int \tau^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{\tau\tau' \, d\sigma \, d\sigma'}{D}\right] + + \frac{1}{2} R \int \varphi^2 d\sigma - (hl + h'\lambda) \int (\tau^2 + \varphi^2) \, d\sigma, \tag{8}$$

где h и h' остаются ограниченными при малых l и λ, и функция φ не зависит от функции τ. Условия, налагаемые на τ, являются следствиями условий, которые были поставлены для f. Формула (8) приводит к следующему: если для любой допустимой функции τ выполняется неравенство

$$R \int \tau^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{\tau\tau' \, d\sigma \, d\sigma'}{D} \geqslant t \int \tau^2 \, d\sigma \tag{9}$$

при положительном значении постоянной t, то $\Delta_2 \Pi > 0$; если же это неравенство при всех допустимых τ выполняется лишь при $t < 0$, то $\Delta_2 \Pi$ может принимать и отрицательные значения.

Случай $t = 0$ исключается выбором f. Левая часть (9) представляет собою вторую вариацию Π при фиксированном S.

Дальнейшие вычисления основаны на применении формулы замкнутости при разложении по сферическим функциям. В магистерской диссертации Ляпунов пользовался еще разложениями по сферическим функциям, что вводило лишние предположения. В этом, повидимому, заключается начало интереса Ляпунова к уравнению замкнутости. Обозначим

$$Y_{n,s} = E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu);$$

$$\int Y^2_{n,s} d\sigma = \gamma_{n,s}; \qquad \int \tau Y_{n,s} d\sigma = \gamma_{n,s} a_{n,s};$$

$$\int \left(\int \frac{\tau' d\sigma'}{D} \right) Y_{n,s} d\sigma = \gamma_{n,s} b_{n,s}.$$

Из формулы Лиувилля и уравнения замкнутости следует

$$b_{n,s} = \frac{4\pi}{2n+1} \mathbf{E}_{n,s} F_{n,s} a_{n,s}.$$

Кроме того, уравнение замкнутости дает

$$\int \tau^2 d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} \gamma_{n,s} a^2_{n,s};$$

$$\int \frac{\tau\tau' d\sigma d\sigma'}{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} \gamma_{n,s} a_{n,s} b_{n,s},$$

и неравенство (9) может быть переписано в виде

$$\sum_{n=0}^{8} \sum_{s=0}^{2n} T_{n,s} \gamma_{n,s} a^2_{n,s} - t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} \gamma_{n,s} a^2_{n,s} \geqslant 0. \tag{10}$$

Число t должно быть выбрано так, чтобы при некоторых $a_{n,s}$, отличных от нуля, имел место знак равенства. Условия, накладываемые на τ, дают

$$a_{0,0} = a_{1,0} = a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,3} = 0;$$

$$g_0 \gamma_{2,0} a_{2,0} + g_4 \gamma_{2,4} a_{2,4} = 0,$$

где g_0 и g_4 — коэффициенты в разложении

$$\Gamma = g_0 E_{2,0}(\mu) E_{2,0}(\nu) + g_4 E_{2,4}(\mu) E_{2,4}(\nu).$$

Обозначим

$$T = \frac{g_0^2 \gamma_{2,0} T_{2,4} + g_4^2 \gamma_{2,4} T_{2,0}}{g_0^2 \gamma_{2,0} + g_4^2 \gamma_{2,4}},$$

и пусть T_0 — наименьшее из таких $T_{n,s}$, отличных от $T_{2,0}$ и $T_{2,4}$, что $a_{n,s}$ не должны равняться нулю. Число t равняется наименьшему из чисел T и T_0. В рассматриваемом случае эллипсоидов Якоби $T > 0$, и можно считать при исследовании $\Delta_2 \Pi$, что $t = T_0$. Так как $T_{2,3} = 0$, то остается определить знак $T_{2,1}$, $T_{2,2}$ и $T_{n,s}$ при $n \geqslant 3$. Доказывается, что $T_{2,1}$, $T_{2,2}$ и $T_{n,s}$ при $s < 2n$ положительны, а для остальных величин имеет место неравенство

$$T_{3,6} < T_{4,8} < T_{5,10} < \ldots,$$

и, таким образом, знак t совпадает со знаком $T_{3,6}$, т. е. знак $\Delta_2 \Pi$ совпадает со знаком $T_{3,6}$.

Всякое $T_{n,2n}$ при $n \geqslant 3$ обращается в нуль для некоторого эллипсоида Якоби E_n, отличного от E_2, причем $T_{n,2n}$ положительно для эллипсоидов, менее вытянутых, чем E_n, и отрицательно для более вытянутых эллипсоидов.

Пока не фиксировано f и не исследовано $\Delta_1 \Pi$. Если за f принять эллипсоид Якоби с заданным S, при выполнении остальных условий, налагаемых на f, то в результате вычислений доказывается, что $\Delta_1 \Pi \geqslant 0$, причем равенство имеет место только при $S = S_0$, а знак $\Delta_2 \Pi$ не зависит от разности $(S - S_0)$. Таким образом, для минимума Π необходимо $t \geqslant 0$ и достаточно $t > 0$. Но знак $\Delta_2 \Pi$ совпадает со знаком $T_{3,6}$, и, следовательно, Π имеет минимум для эллипсоидов Якоби, менее вытянутых, чем E_3, и не имеет минимума для более вытянутых эллипсоидов. Мы говорили об этом выше в связи с магистерской диссертацией.

Совершенно аналогично рассматривается задача устойчивости эллипсоидов Маклорена. Отдельно доказывается устойчивость сферы.

4

Если исследовать устойчивость фигур равновесия при любых возмущениях, то особенными являются лишь два случая: эллипсоид Якоби E_2 с наибольшей угловой скоростью (эллипсоид вращения) и эллипсоид Якоби E_3, приводящий к грушевидным фигурам равновесия. Эти эллипсоиды определяются соответственно уравнениями

$$T_{2,4}=0 \quad \text{и} \quad T_{3,6}=0.$$

Пусть Ω_0, S_0 и Ω_α, S_α — значения Ω и момента инерции S для эллипсоида E_2 или E_3 и для близкой фигуры равновесия, ответвляющейся от E_2 или E_3. В первом случае это будут трехосные эллипсоиды Якоби, близкие к E_2, и во втором — грушевидные фигуры равновесия. Буква α обозначает малый параметр, аналогичный тому, который был введен выше при рассмотрении фигур равновесия.

Пусть далее

$$M_0=\Omega_0 S_0^2 \qquad \text{и} \qquad M_\alpha=\Omega_\alpha S_\alpha^2=(\Omega_0+\eta_\alpha) S_\alpha^2.$$

Основной результат, как мы упоминали выше, сводится к следующему: если $M_\alpha - M_0 > 0$, то величина Π имеет минимум для исходной фигуры равновесия, а если $M_\alpha - M_0 < 0$, то этого минимума нет. В случае эллипсоида E_2 вопрос решается подсчетом величины M для эллипсоидов, причем обнаруживается, что $M_\alpha - M_0 > 0$.

Значительно более сложным является рассмотрение эллипсоида E_3. Доказывается, что M_α разлагается по малому параметру α в ряд вида

$$M_\alpha = M_0 + c\alpha^2 + \ldots,$$

и весь вопрос сводится к определению знака постоянной c, которая имеет вид

$$c = \frac{1}{2}\gamma B\Omega_0 S_0 - \frac{A_3}{B} M_0', \tag{11}$$

где M_0' — производная от M_α по Ω при $\alpha = 0$ (эта производная берется по серии эллипсоидальных фигур равновесия); γ — положительная постоянная; B и A_3 — коэффициенты, входящие в формулу, связывающую параметры α и η_α, аналогичную формуле (22) из предыдущего раздела

$$A_3\alpha^3 + A_4\alpha^4 + \ldots + (B + S)\alpha\eta + C_3\eta^3 + C_4\eta^4 + \ldots = 0. \tag{12}$$

В этой формуле S — степенной ряд по α и η без свободного члена.

Ряд (12) был построен и исследован Ляпуновым в первой части его работы «Sur les figures d'équilibre...» (1906 г.), где он применял формулы, несколько отличные от тех, которые мы излагали, следуя четвертой части упомянутой работы (1914 г.). Исследование устойчивости фигур равновесия (1908 г.) проводилось Ляпуновым в обозначениях работы 1906 г. Ляпунов доказывает, что постоянная B выражается формулой

$$B = -\frac{1}{\sqrt{\rho(\rho+1)(\rho+q)}}\left(\frac{dT_{3,6}}{d\Omega}\right)_{\Omega=\Omega_0},$$

из которой следует, что $B < 0$. Легко доказывается, что и $M_0' < 0$. Таким образом, остается определить знак постоянной A_3. При помощи весьма сложных вычислений, подробно изложенных в третьей части работы «Sur les figures d'équilibre...», Ляпунов показывает, что $A_3 > 0$, и из формулы (11) непосредственно следует, что $c < 0$, т. е. $M_\alpha - M_0 < 0$. Таким образом, для эллипсоида E_3 величина П не имеет минимума.

Для остальных неэллипсоидальных фигур вопрос о наличии минимума П не представляет труда после исследования этого вопроса для эллипсоидов. Ляпунов доказывает, что

и в случае грушевидных фигур неравенство $M_\alpha - M_0 < 0$ приводит к тому, что нет минимума П.

Метод исследования устойчивости эллипсоидов E_2 и E_3 существенно отличен от того метода исследования остальных эллипсоидов, который мы изложили выше. Весьма сложным является построение промежуточной фигуры f. Уравнение ее поверхности принимается в виде

$$x = \sqrt{\rho + 1 + \zeta} \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \sqrt{\rho + q + \zeta} \sin\theta \sin\psi, \\ z = \sqrt{\rho + \zeta} \cos\theta, \tag{13}$$

причем ζ определяется из некоторого обобщенного уравнения равновесия, аналогичного уравнению (10) из предыдущего раздела. В случае эллипсоида E_3 это обобщенное уравнение дает зависимость ζ от трех параметров, из которых два аналогичны параметрам α и η, о которых мы говорили выше. Эти параметры дают возможность достигнуть того, чтобы f удовлетворяла всем необходимым условиям. После этого доказывается, что $\Delta_2 \Pi \geqslant 0$, и все сводится к исследованию $\Delta_1 \Pi$. Это исследование и приводит к тому общему результату, связанному со знаком разности $M_\alpha - M_0$, который мы формулировали выше.

Отметим, что формулы (13) отличны от формул

$$x = \sqrt{1 + \zeta}\, \sqrt{\rho + 1} \sin\theta \cos\psi, \quad y = \sqrt{1 + \zeta}\, \sqrt{\rho + q} \sin\theta \sin\psi, \\ z = \sqrt{1 + \zeta}\, \sqrt{\rho} \cos\theta, \tag{14}$$

которые были приняты за исходные в предыдущем разделе. Замена формул (13) на формулы (14) была сделана в работе 1914 г.

Работа 1908 г. содержит 140 страниц in quarto. Первая, бо́льшая часть ее, часть, посвященная исследованию мини-

мума П, поражает силой анализа и строгостью и полнотой изложения. Упомянутая задача представляет своеобразные трудности в виду наличия в выражении П момента инерции S и интеграла по возмущенному объему и требует специальных методов исследования. Представление об этих методах в случае несингулярных эллипсоидов мы пытались дать выше. Отметим еще, что, производя интегрирование разрывных функций по возмущенному телу F, Ляпунов в подстрочном примечании дает определение измеримости объема F (по современной терминологии — измеримость по Жордану). Далее, приводя интеграл по F к последовательным квадратурам, Ляпунов указывает на то, что внутренняя квадратура может не иметь смысла и что если вместо этой квадратуры брать верхний или нижний интеграл Дарбу, то вторая квадратура выполнима, и результат совпадает с интегралом по F. Как всегда в такого рода вопросах, Ляпунов излагает это очень кратко и без всяких ссылок на другие работы.

Большая ценность последней главы работы 1908 г. заключается в тех общих соображениях об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости, которые в ней высказаны. До настоящего времени вопрос этот не продвинулся дальше.

IV. Различные работы

В этом разделе мы остановимся на некоторых отдельных работах Ляпунова. Они по своему содержанию часто связаны с теми темами, о которых мы говорили выше, но их удобнее излагать как отдельные, самостоятельные работы.

Несколько особняком стоят две студенческие работы Ляпунова. За первую из них — «О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы» (1881) — он получил золотую медаль. Вторая —

«О потенциале гидростатических давлений» (1881) — является продолжением первой.

Начнем с изложения содержания первой работы. Она посвящена исследованию влияния сосуда, содержащего несколько жидкостей, на равновесие погруженного в него твердого тела. Жидкости предполагаются однородными и несжимаемыми. В первом параграфе предполагается, что объемные силы имеют потенциал, а в остальной работе внешние силы сводятся к силе тяжести.

В первом параграфе доказывается существование потенциала гидростатического давления на погруженное тело. Этот потенциал представляет собою сумму некоторого интеграла по объему тела и функции величин объемов V_k той части тела, которая находится в k-ой жидкости. Объем V_k ограничен поверхностью тела и двумя поверхностями уровня потенциала внешних сил. При заданной форме сосуда потенциал гидростатического давления есть функция шести координат, определяющих положение твердого тела в пространстве.

Второй параграф посвящен исследованию равновесия и устойчивости равновесия погруженного тела, причем для отыскания устойчивого равновесия Ляпунов ищет условия минимума потенциала всех сил, действующих на погруженное тело. Перечислим некоторые результаты этого параграфа. Установлены необходимые и достаточные условия равновесия. Найдено выражение второй вариации потенциала сил, действующих на тело. Доказано, что любое положение тела устойчиво по отношению к поступательным перемещениям по вертикальному направлению и что положение равновесия устойчиво для всех перемещений, если центр тяжести тела лежит ниже или совпадает с общим центром тяжести всей вытесненной телом жидкости. Далее доказывается ряд свойств положения равновесия, связанных с положением центра тяжести сечений тела с плоскостями, разделяющими жидкость.

Третий параграф работы посвящен изложению аналитического метода отыскания положений равновесия тела. Построена система уравнений, определяющая положение равновесия, и даны указания о выборе решений этой системы. Кроме того, установлена теорема об устойчивости положения равновесия, обобщающая известные теоремы о свойствах радиусов наибольшей и наименьшей кривизны поверхностей центров в случае одной или двух жидкостей. В четвертом параграфе рассматриваются примеры.

Работа «О потенциале гидростатических давлений» непосредственно примыкает к предыдущей. В ней рассматривается вопрос о существовании потенциала гидростатического давления для случая сжимаемых жидкостей и деформируемого тела. Считается, что система находится под действием объемных сил, имеющих потенциал. Сначала предполагается, что этот потенциал не имеет экстремумов внутри тела и жидкостей. Условия для существования потенциала и выражения для него ищутся в двух случаях: 1) когда сосуд неподвижен и неизменяем и 2) когда сосуд деформируем. В первом случае исследуется существование потенциала гидростатического давления на тело и во втором — на тело и на сосуд. Основной является теорема о том, что гидростатические давления на тело, сосуд и поверхность уровня, ограничивающую жидкость, имеют потенциал. В случае неподвижного твердого сосуда условие существования потенциала гидростатического давления на тело состоит в том, чтобы давление на упомянутую поверхность уровня зависело только от значения потенциала объемных сил на этой поверхности. Отмечается, что существование потенциала гидростатического давления на тело не зависит от характера его деформации. В случае неограниченного сосуда потенциал гидростатического давления на тело равен интегралу от давления по объему, занимаемому телом.

В работе «Некоторое обобщение формулы Лежень-Дирихле для потенциальной функции эллипсоида на внутреннюю точку» (1885 г.) исследуется интеграл

$$V(x, y, z) = \int\int\int \frac{F(r)}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

распространенный на эллипсоид

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} \leqslant 1$$

в предположении, что точка (x, y, z) также принадлежит этому эллипсоиду. Результат состоит в следующем: если A — наибольшая полуось эллипсоида, $F(r)$ — функция, регулярная в круге $|z| \leqslant k$, где $k > 2A$, то

$$V(x, y, z) = 2ABC \int\limits_l \frac{H(\lambda)\, d\lambda}{D(\lambda)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} F(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)}\cos\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi,$$

где

$$D(\lambda) = \sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)};$$

$$H(\lambda) = 1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda},$$

и контур l идет по вещественной оси от точки $\lambda = 0$ до точки $\lambda = R$, причем

$$\frac{k^2 - k\sqrt{k^2-4A^2}}{2} < R < \frac{k^2 + k\sqrt{k^2-4A^2}}{2},$$

дальше по полной окружности с центром $\lambda = 0$ и радиусом R и по вещественной оси от $\lambda = R$ до $\lambda = 0$.

В работе «О теле наибольшего потенциала» (1886 г.) доказывается, что если существует такое тело D, для которого шестикратный интеграл

$$\Pi_1 = \int\limits_D \int\limits_D \frac{d\tau\, d\tau'}{r}$$

достигает, при заданном объеме D, точной верхней границы, то D есть шар. Эта работа непосредственно связана с устойчивостью сферы, как фигуры равновесия.

В 1919 г. Карлеман доказал (Mat. Zeitschr., Bd. III, H. 1), что указанное выше предположение действительно имеет место. Вместо $\frac{1}{r}$ он рассматривает любую положительную, убывающую функцию $F(r)$, которая может обращаться в бесконечность при $r=0$. При этом предполагается, что интеграл от функций $rF(r)$, взятый по промежутку $(0, a)$, сходится.

В работе «Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости» (1883 г.) Ляпунов указывает новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости при отсутствии внешних сил. Дело сводится к разысканию четвертого интеграла дифференциальных уравнений, отличного от известных трех интегралов Кирхгофа.

Случай интегрируемости, открытый Ляпуновым, тесно связан с тем случаем интегрируемости, который был указан В. А. Стекловым в его магистерской диссертации. В обоих случаях налагаются некоторые условия на коэффициенты в выражении живой силы системы, состоящей из твердого тела и жидкости.

В работе «Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку» (1894 г.) доказывается следующий результат: кроме случаев Эйлера, Лангранжа и С. В. Ковалевской, всегда существуют такие вещественные начальные значения p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 $(\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2=1)$, при которых среди функций p, q, r, ξ, η, ζ, являющихся решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, имеются многозначные функции t. Это получается в результате исследования системы дифференциальных уравнений, опре-

деляющей частные производные от упомянутых функций по начальным значениям для некоторых частных решений основной системы дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела.

В работе «О рядах, предложенных Хиллом для представления движения луны» впервые доказывается сходимость рядов, при помощи которых Хилл проинтегрировал дифференциальные уравнения движения луны. Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2p}{d\tau^2}+2(1+m)i\frac{dp}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p+q)=\frac{3}{2}\lambda(q-1)^{-2\tau i}+lR_p,$$

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}-2(1+m)i\frac{dq}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p+q)=\frac{3}{2}\lambda(p-1)^{2\tau i}+lR_q,$$

где

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{1}{2}p+\frac{3}{2}q+R_p,$$

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}q+R_q,$$

$$l=1+2m+\frac{3}{2}m^2,\quad \lambda=m^2.$$

Постоянная λ считается параметром, и ищется периодическое решение этой системы вида

$$p=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\lambda^k;\quad q=\sum_{k=1}^{\infty}q_k\lambda^k,$$

где p_k и q_k не зависят от λ, имеют период 2π и $p_k = q_k$ при $\tau = 0$. При этом p_k и q_k определяются единственным образом, и доказывается сходимость построенных рядов при условии $m \leqslant \frac{1}{7}$ $\left(\text{в теории луны } m \leqslant \frac{1}{12}\right)$. Оказывается, что построенное решение имеет период π.

Академик *В. И. Смирнов.*

КОММЕНТАРИИ



Комментарий к главе I работы «Общая задача об устойчивости движения»

Работы А. М. Ляпунова по устойчивости движения являются классическими. Они знамениты строгой постановкой вопроса, доказательствами общих и основных теорем теории и изобретательностью в создании методов решения задач об устойчивости и неустойчивости. Отличительной чертой предложенных Ляпуновым методов является то, что они доведены им до алгорифмического совершенства, до известных вычислительных удобств, что особенно важно в связи с возрастающим значением задач об устойчивости в многочисленных физических, механических и инженерных конкретных проблемах.

Чтобы полнее ознакомить читателей с основными идеями исследований Ляпунова по устойчивости движений, в настоящем сборнике перепечатывается первая глава из докторской диссертации Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», ибо в ней последовательно изложены все основные общие теоремы Ляпунова, а чтобы осветить состояние вопроса об устойчивости движения до появления работ Ляпунова, перепечатывается полностью «Предисловие»; в комментарии отмечены важнейшие работы, появившиеся после смерти Ляпунова и развивающие отдельные предложения первой главы «Общей задачи об устойчивости движения».

Хотя математическая терминология Ляпунова несколько отличается от терминологии современных руководств по анализу, однако редакция считала нужным ее сохранить по оригиналу без соответствующих примечаний. Приведем примечания к некоторым местам работы.

1 (стр. 11). Существует русский перевод работы А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». ГОНТИ, 1947. Идеи, содержащиеся в этом мемуаре Пуанкаре о применении топографических систем к качественному изучению кривых, определенных дифференциальными уравнениями, Ляпунов развил до алгорифмических методов исследования задач об устойчивости и неустойчивости движения.

2 (стр. 19). Введение функции Q_s и определение устойчивости по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_n$ имеет большое значение. Это определение Ляпунова объединяет многочисленные определения устойчивости, существовавшие ранее.

3 (стр. 20). В развитых Ляпуновым методах исследования устойчивости условия, высказанные в определениях о неограниченном изменении t и об отсутствии возмущающих сил, могут быть сняты в весьма значительной степени. Условие отсутствия возмущающих сил, если эти силы стеснить структурными ограничениями, впервые было снято еще Ляпуновым в решении задачи об устойчивости по первому приближению, например в теоремах п. 13.

4 (стр. 20). Неустойчивость эллиптического движения точки, притягиваемой неподвижным центром обратно пропорционально квадрату расстояния, по отношению как к прямоугольным осям, так и по отношению к радиусу-вектору и скорости, следует непосредственно из дифференциальных уравнений возмущенного движения в вариациях прямоугольных и полярных координат.

Возмущенное движение точки при достаточно малых возмущениях будет также эллиптическим и, следовательно,

$$r - \frac{p'}{1 + e' \cos \varphi'} = 0,$$

где p', e' — параметр и эксцентриситет эллипса, описываемого точкою в возмущенном движении, а φ' — угол, образованный радиусом-вектором r возмущенного движения с наименьшим радиусом-вектором возмущенной орбиты; отсюда выражение

$$r - \frac{p}{1 + e \cos \varphi} = \frac{(p' - p) + (p' e \cos \varphi - p e' \cos \varphi')}{(1 + e' \cos \varphi')(1 + e \cos \varphi)}$$

есть по крайней мере первого порядка малости по отношению к малым возмущениям $p'-p$, $e'-e$, $\varphi'-\varphi$.

Это и доказывает устойчивость эллиптического движения рассматриваемой точки по отношению к величине

$$r-\frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Предложения Ляпунова о свойствах круговой орбиты могут быть получены из предыдущего, если эллиптическая орбита вырождается в круговую, или непосредственно из уравнений возмущенного движения.

5 (стр. 21). Пусть в системе координат с началом в неподвижной точке O твердого тела и с осями, направленными по главным осям x, y, z эллипсоида инерции, построенного у точки O, уравнения невозмущенного движения твердого тела будут

$$p_0=0,\quad q_0=0,\quad r_0\neq 0,$$

где p, q, r обозначают мгновенные угловые скорости твердого тела относительно осей x, y, z соответственно.

Обозначая через A, B, C моменты инерции твердого тела относительно осей x, y, z, а через ξ, η, ζ — вариации угловых скоростей p, q, r, можно записать уравнения возмущенного движения

$$A\frac{d\xi}{dt}=(B-C)\eta r_0+(B-C)\eta\zeta,$$

$$B\frac{d\eta}{dt}=(C-A)r_0\xi+(C-A)\zeta\xi,$$

$$C\frac{d\zeta}{dt}=(A-B)\xi\eta.$$

Если невозмущенное движение есть вращение вокруг наименьшей полуоси эллипсоида инерции ($A\geqslant B>C$), то устойчивость этого вращения доказывается непосредственно по теореме Ляпунова об устойчивости из рассмотрения определенно-положительной функции

$$\frac{A-C}{B}\xi^2+\frac{B-C}{A}\eta^2+[A\xi^2+B\eta^2+2Cr_0\zeta+C\zeta^2]^2;$$

ее полная производная по времени, в силу уравнений возмущенного движения, будет нулем,

Устойчивость вращения вокруг наибольшей полуоси эллипсоида инерции ($A \leq B < C$) доказывается по теореме Ляпунова об устойчивости из существования знакоопределенного интеграла

$$\frac{A-C}{B}\xi^2 + \frac{B-C}{A}\eta^2 - [A\xi^2 + B\eta^2 + 2Cr_0\zeta + C\zeta^2]^2.$$

Неустойчивость вращения твердого тела вокруг средней полуоси эллипсоида инерции ($B > C > A$) может быть строго доказана рассмотрением функции

$$V = (\eta - m\xi)(\eta - n\xi),$$

где положительные постоянные m и n выбраны согласно неравенствам

$$m > \sqrt{\frac{C-A}{B}\,\frac{A}{B-C}} > n.$$

Полная производная по времени t от функции V есть

$$V' = (r_0 + \zeta)\left\{-\xi^2(m+n)\frac{C-A}{B} - \eta^2(m+n)\frac{B-C}{A} + \right.$$

$$\left. + 2\xi\eta\left(mn\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B}\right)\right\}.$$

Дискриминант квадратичной формы, стоящей в фигурных скобках, при нашем выборе постоянных m и n, — положителен, а коэффициенты при чистых квадратах — отрицательны, и, следовательно, эта квадратичная форма переменных ξ, η будет определенно-отрицательной относительно ξ, η.

Если первый множитель $r_0 + \zeta$ принимает значения, сколь угодно близкие к нулю, то в этом случае неустойчивость доказывать нечего. Допустим обратное, что выражение $r_0 + \zeta$ по абсолютной величине остается больше некоторого положительного числа. Используя при этом предположении доказательство теоремы II Ляпунова в отношении функции V и переменных ξ, η, удостоверимся в неустойчивости вращения твердого тела вокруг средней полуоси эллипсоида инерции.

Предложения Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по отношению к углам, составляемым мгновенной осью вращения твердого тела с какими-либо неподвижными направлениями, могут быть установлены, исходя из кинематических формул Эйлера зависимости p, q, r от углов Эйлера и их производных.

6 (стр. 28). Формула (9) может быть получена обычным методом изменения произвольных постоянных.

7 (стр. 48). В доказательстве этой теоремы дан метод для определения верхней и нижней границ значений характеристичных чисел. Чис-

ленные значения этих границ, полученные Ляпуновым попутно, не являются точными; однако можно указать случаи, когда методом Ляпунова определяются практически ценные границы.

Например методом Ляпунова доказана такая практически весьма ценная теорема:

Если в системе линейных уравнений коэффициенты p_{sr} стремятся к определенным пределам c_{sr} при неограниченном увеличении t, то ее наинизшее характеристичное число совпадает с наинизшим характеристичным числом предельной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1} x_1 + \ldots + c_{sn} x_n, \qquad (s = 1, \ldots, n).$$[1]

8 (стр. 49). Можно указать случаи, когда произвольно малое изменение коэффициентов p_{sr} вызывает конечные изменения в величинах характеристичных чисел системы линейных дифференциальных уравнений.[2]

9 (стр. 63). Начатые Ляпуновым исследования о приводимых системах развил проф. Н. П. Еругин (Приводимые системы. Труды Математического института имени В. А. Стеклова, XIII, 1946).

10 (стр. 79). Примечание содержит теорему об устойчивости по первому приближению для неправильных систем, если $k = n$. Эту теорему Ляпунова и теорему о неустойчивости по первому приближению для неправильных систем, когда существует хотя бы одно характеристичное число больше σ, можно доказать, пользуясь вторым методом Ляпунова.[3]

Другие критерии устойчивости по первому приближению предложили О. Перрон (Mathematische Zeitschrift, Bd. 32, 1930), К. П. Персидский (Математический сборник, т. 40) и И. Б. Малкин (Труды Казанского авиационного института, 1937).

11 (стр. 83). Введенное Ляпуновым понятие знакоопределенной функции, если она зависит от t, отличается от обычного понимания знакоопределенной функции.

Например, при $n = 2$, функция

$$e^{-t}(x_1^2 + x_2^2)$$

для всех рассматриваемых значений t есть определенно-положительная квадратичная форма в обычном смысле слова и не является знакоопределенной в смысле Ляпунова.

---

[1] Н. Г. Четаев. Прикладная математика и механика, т. IX, 1945.

[2] К. П. Персидский. Известия Академии Наук Казахской ССР, серия математики и механики, 1947.

[3] Н. Г. Четаев. Прикладная математика и механика, т. XII, 1948.

12 (стр. 87). В доказательстве теоремы, выполненном в духе ε-доказательств, следует отметить предложенный Ляпуновым практически полезный способ нахождения для заданного числа ε, меньшего H, с помощью функций V и W положительного числа λ, обладающего свойством: если начальные значения ξ_s стеснены неравенствами

$$|\xi_s| \leqslant \lambda, \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

то во все последующее время $t \geqslant T$ значения переменных x_s будут удовлетворять неравенствам

$$|x_s| < \varepsilon, \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Из этого доказательства Ляпунов использует в теореме нужное ему обстоятельство, что для произвольного положительного ε, сколь бы мало оно ни было, соответствующее λ существует, не останавливаясь на вопросе о наибольшем значении λ для заданного ε.

Функцию V, удовлетворяющую условиям доказанной теоремы Ляпунова об устойчивости, называют *функцией Ляпунова*. Вопрос о существовании функции Ляпунова для всякого невозмущенного движения разрешил проф. К. П. Персидский (Доклады Академии Наук, 1938).

13 (стр. 94). В «Journal des Mathematiques pures et appliquées» (S. V, t. 3, 1897) Ляпунов посвятил этому примеру специальную статью «О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть maximum».

При более широких предположениях вопрос об обращении теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия при максимуме силовой функции разрешил Н. Г. Четаев (Ученые Записки Казанского университета, 1938).

14 (стр. 96). Н. Г. Четаев (Ученые Записки Казанского университета, 1938) предложил одну теорему о неустойчивости, в которой вводятся в рассмотрение две функции. Идея этой удобной для приложений теоремы развивалась К. П. Персидским (Успехи математических наук, 1946) и Мышкисом (Доклады Академии Наук, 1946). Вопрос об обратимой, алгорифмической теореме о неустойчивости остается открытым.

15 (стр. 96). Предложения, отмеченные в примечании, Ляпунов использовал при исследовании критического случая, когда характеристичное уравнение имеет пару чисто мнимых корней (Общая задача, стр. 150). Следует заметить, что в предположениях примечания весьма существенным является предположение, что «по самому значению этих переменных, для некоторых из них возможны величины только одного из двух знаков».

Член-корреспондент Академии Наук СССР

Н. Г. Четаев.

Коментарий к работе «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле»

Публикуемая работа А. М. Ляпунова «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле» является переводом с французского языка исследования «Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet», напечатанного в 1898 г. в «Journal des Mathématiques» (V-me série, t. IV, 1898, pp. 241—311).

Это исследование содержит ряд принципиально важных результатов, относящихся, с одной стороны, к строгому исследованию свойств потенциалов простого и двойного слоя и, с другой стороны, к задаче Дирихле и некоторым общим формулам теории гармонических функций. В нем впервые был строго установлен ряд основных фактов теории потенциала и теории гармонических функций, и это исследование является основной работой для современного периода развития указанных теорий.

Общее содержание работы и цель исследования достаточно полно указаны в предисловии. С точностью, которая присуща не только математической мысли А. М. Ляпунова, но и его языку, Ляпунов так описывает содержание своего исследования в одной более поздней работе:[1] «... все, что я хотел сделать, сводилось к тому, чтобы указать некоторые следствия, к которым можно придти, если принцип Неймана уже установлен для рассматриваемой поверхности — будь она выпуклой или нет».

К этому надо добавить, что результаты работы, касающиеся свойств потенциалов простого и двойного слоя, не зависят от принципа Неймана. Они являются основой не только настоящего исследования, но и всех последующих работ по теории потенциала.

---

[1] Sur le principe fondamental de la méthode de Neuman dans le problème de Dirichlet (Сообщения Харьковского математического общества, 2-я серия, т. VII, 1902, стр. 1 — 24).

Метод решения задачи Дирихле с помощью отыскания плотности двойного слоя, предложенный Нейманом, не только давал доказательство существования решения задачи Дирихле, но и указывал способ вычисления решений уравнения Лапласа по граничным значениям.

Как известно, сходимость рядов метода Неймана была доказана вначале лишь для выпуклых поверхностей, но считалось, что сходимость этих рядов может быть установлена и для поверхностей общего вида. В силу этого, методу Неймана придавалось большое значение. Ляпунов, постулируя возможность решения задачи Дирихле методом Неймана, поставил своей целью обосновать с помощью этого метода главные формулы и результаты теории гармонических функций.

Все исследование разделено на три главы.

Глава I — служебного характера. Имея своей целью строго установить область приложимости полученных результатов, Ляпунов в этой главе дает сначала определение и свойства тех поверхностей, к которым будет относиться все дальнейшее исследование. Рассматриваемые Ляпуновым поверхности определяются условиями п. 1 и специальным условием п. 7. В настоящее время под поверхностью Ляпунова понимают в теории уравнений в частных производных поверхности, удовлетворяющие лишь условиям п. 1.

Большая часть главы посвящена рассмотрению поведения производных потенциала простого слоя вблизи поверхности S самого слоя; здесь доказывается, что если плотность слоя удовлетворяет условию Липшица, то потенциал слоя обладает предельными значениями всех трех частных производных первого порядка по координатам; эти предельные значения непрерывны вдоль поверхности.

Особое же внимание уделяется исследованию поведения прямых и предельных значений нормальных производных потенциала простого слоя; в видах дальнейших приложе-

ний (гл. II) доказывается, что прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя с ограниченной интегрируемой плотностью удовлетворяет условию Липшица. Под прямым значением нормальной производной подразумевается значение соответствующего интеграла в точке, лежащей на поверхности S.

Рассмотрение потенциалов двойного слоя дано, в основном, в главе III, в главе I указано лишь одно неравенство для производной этого потенциала, взятой по нормали к поверхности, для точек, лежащих на нормали и находящихся вблизи поверхности.

Результаты, полученные в главе I, прилагаются затем в главе II к исследованию основной задачи электростатики об определении равновесной плотности электрического заряда на поверхности проводника.

Здесь доказывается теорема, что уравнение

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos \varphi}{r^2}\, ds' \tag{a}$$

при дополнительном условии

$$\int k ds = q \tag{b}$$

имеет всегда одно непрерывное решение.

Ляпунову удается доказать эту теорему в некотором условном смысле.

Поверхность S, по которой распространяется интеграция, в уравнениях (a) и (b) удовлетворяет условиям п. 1 и, кроме того, д о б а в о ч н о м у у с л о в и ю п. 7 о справедливости для поверхности принципа Неймана. При этих условиях Ляпунов показывает, что уравнение (a), при условии (b), имеет решение и что это решение может быть получено в виде предела

последовательности функций $k_0, k_1, \ldots, k_m, \ldots$, определяемых с помощью итерационного процесса

$$k_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k'_{m-1} \cos \varphi}{r^2} ds'; \tag{c}$$

начальная функция k_0 удовлетворяет условию (b), но в остальном — произвольная ограниченная интегрируемая функция.

К этому результату Ляпунов приходит окольным путем, характерным для исследований по уравнениям математической физики в эпоху, предшествовавшую созданию теории интегральных уравнений.

Приведем вкратце план исследования вопроса главы II. В п. 8 указывается, что уравнение (a) при условии (b) имеет лишь одно непрерывное решение.

В п. 9 рассматривается сначала последовательность функций $v_0, v_1, v_2, \ldots$, определяемых на поверхности S одна за другой с помощью формулы

$$v_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{v'_{m-1} \cos \varphi'}{r^2} ds',$$

вводящей потенциалы двойного слоя. При этом v_0 определяется как предельное значение потенциала простого слоя с плотностью k_0, которая удовлетворяет условию Липшица. Затем доказывается, что последовательность гармонических функций

$$V_0, V_1, V_2, \ldots, \tag{d}$$

принимающих на поверхности S соответственно значения

$$v_0, v_1, v_2, \ldots,$$

сходится внутри поверхности S к постоянной величине; это доказательство основано на допущении приложимости к поверхности S принципа Неймана.

В п. 10 показывается, что каждая гармоническая функция последовательности (d) может быть отождествлена с по-

тенциалом некоторого простого слоя. При этом устанавливается связь между плотностью k_m и плотностью k_{m-1} простых слоев с потенциалами V_m и V_{m-1} соответственно. Эта связь определяется формулой (c).

В п. 11 устанавливается сначала (это необходимо для проведения одной детали доказательства), что функции (d) могут быть рассматриваемы и как потенциалы двойных слоев, и для абсолютных значений плотностей этих слоев дается оценка сверху.

На основании этого результата, а также ряда свойств производных потенциала простого слоя, доказывается, что последовательность функций k_m равномерно сходится на всей поверхности S. В силу этого, в формуле (c) возможно перейти к пределу, и мы получаем (п. 12), что предел последовательности функций k_m является решением уравнения (a).

Третья глава работы посвящена в основном исследованию вопроса о существовании на границе S предельных значений производных у функции, являющейся решением задачи Дирихле.

Главный результат этого исследования состоит в установлении необходимого и достаточного условия существования нормальной производной у этой гармонической функции. Это условие, исключительно законченное по своему характеру, состоит в требовании существования нормальной производной у потенциала двойного слоя, плотность которого равна граничным значениям искомой гармонической функции. Для существования же нормальной производной у потенциала двойного слоя указывается весьма широкое достаточное условие, вытекающее из подробного изучения этой производной.

Большой интерес представляет установление достаточности существования нормальной производной у потенциала двойного слоя для существования нормальной производной у решения задачи Дирихле. Здесь, по существу дела, разбирается вопрос о том, при каких условиях, накладывае-

мых на функции f и F, гармоническая функция V, определяемая основной формулой теории гармонических функций

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos \Phi'}{R^2}\, ds' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{F}{R}\, ds',$$

принимает на поверхности S значения f, а ее нормальная производная — значения F. Ответ на этот вопрос вытекает из рассмотрения интегральных уравнений метода Неймана, и именно для получения этого ответа и надо подчинить поверхность S условию п. 7.

В п. 21 указываются некоторые достаточные условия для граничной функции в задаче Дирихле, при соблюдении которых является возможным обеспечить существование и касательных производных на границе у гармонической функции, являющейся решением задачи Дирихле.

Подробное исследование граничных свойств потенциалов и точное установление пределов приложимости найденных теорем позволило Ляпунову дать впервые безупречное по строгости доказательство свойства симметрии функции Грина. Основные результаты об условиях существования нормальной производной позволили констатировать существование у функции Грина названной производной, и затем чрезвычайно остроумное и простое исследование привело к строгому доказательству формулы, определяющей решение задачи Дирихле через нормальную производную функции Грина. Все эти следствия общей теории потенциала дали впервые строгие доказательства основных результатов теории гармонических функций для поверхностей Ляпунова.

Некоторые из теорем данного исследования носят условный характер, ибо они связаны с предположением о справедливости принципа Неймана.

В настоящее время, когда метод Неймана включен, как приложение, в общую теорию интегральных уравнений и установлена его применимость к решению задачи Дирихле при трех условиях п. 1, мы можем считать, что все теоремы

Ляпунова, связанные с предложением о справедливости принципа Неймана, носят уже безусловный характер при единственном предположении, что условия п. 1 для граничной поверхности соблюдаются.

В упомянутой уже нами работе «Sur le principe de Neumann dans le problème de Dirichlet» Ляпунов показал, что если принцип Неймана справедлив при условии, что исходная функция v_0 представляет собою предельные значения потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, то он справедлив и при предположении, что v_0 — ограниченная и интегрируемая на S функция. Основой этого результата является следующая доказанная в упомянутой работе теорема о потенциале двойного слоя: прямое значение потенциала двойного слоя (т. е. значение соответствующего интеграла в точках самой поверхности) с непрерывной плотностью удовлетворяет условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы.

Приведем теперь примечания к некоторым отдельным местам работы.

1 (стр. 102). При изложении своего исследования Ляпунов рассматривает замкнутые поверхности, подчиняющиеся трем условиям п. 1 и одному условию, выражаемому неравенством (12) п. 7. Это последнее условие являлось необходимым принять, дабы получить возможность решить задачу электростатики и изучить вопросы главы III на основе принципа Неймана. В настоящее время это четвертое условие, накладываемое на замкнутые поверхности, можно устранить и под поверхностью Ляпунова понимать всякую замкнутую поверхность, удовлетворяющую лишь трем условиям п. 1.

2 (стр. 111). Это неравенство может быть получено так: мы имеем

$$|T^2-1| \leqslant \frac{2|z||\zeta-z|}{\rho^2+(\zeta-z)^2}+\frac{z^2}{\rho^2+(\zeta-z)^2} \leqslant \frac{2\left|\frac{z}{\rho}\right|\frac{|\zeta-z|}{\rho}}{1+\frac{|\zeta-z|^2}{\rho^2}}+\frac{z^2}{\rho^2}.$$

Но для положительных значений переменного x функция

$$\frac{x}{1+x^2}$$

никогда не может превзойти $\frac{1}{2}$, отсюда имеем

$$|T^2 - 1| < \left|\frac{z}{\rho}\right| + \frac{z^2}{\rho^2}.$$

3 (стр. 113). Полагая в этом неравенстве: $a = T^3$, $b = \frac{1}{\cos\vartheta_0}$, получаем

$$\left|\frac{T^3}{\cos\vartheta_0} - 1\right| < |T^3 - 1| + \left|\frac{1}{\cos\vartheta_0} - 1\right| + |T^3 - 1|\left|\frac{1}{\cos\vartheta_0} - 1\right| <$$

$$< 12a\rho^\alpha + 2a\rho^\alpha + 12a\rho^\alpha \cdot 2a\rho^\alpha = a\rho^\alpha(14 + 24a\rho^\alpha).$$

Но $2a\rho^\alpha < 1$; отсюда получаем

$$\left|\frac{T^3}{\cos\vartheta_0} - 1\right| < 26a\rho^\alpha.$$

4 (стр. 117). Докажем неравенство, $r_0^\beta < 2\rho^\beta$. Мы имеем, пользуясь неравенством (2),

$$r_0 = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{z}{\rho}\right)^2} < \rho\sqrt{1 + (2a\rho^\alpha)^2},$$

но $2a\rho^\alpha < 2a\delta^\alpha < 1$, и, следовательно, $r_0 < \rho\sqrt{2}$. Число $\beta < 1$, поэтому

$$r_0^\beta < \rho^\beta(\sqrt{2})^\beta < 2\rho^\beta.$$

5 (стр. 120). Т. е. для этой разности имеет место оценка $|J - J'| \leq Cr^\beta$, где C и β — постоянные.

6 (стр. 127). Выведем эту формулу. С этой целью продифференцируем выражение потенциала двойного слоя по нормали. Мы имеем

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \int \mu' \frac{\partial}{\partial n}\frac{\cos\Phi'}{R^2}\,ds' =$$

$$= 2\int \mu' \frac{\cos\Phi'}{R}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\,ds' + \int \frac{\mu'}{R^2}\frac{\partial\cos\Phi'}{\partial n}\,ds'.$$

Покажем теперь, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}=\frac{\cos\Phi}{R^2}\,;\quad \frac{\partial\cos\Phi'}{\partial n}=\frac{\cos\vartheta+\cos\Phi\cos\Phi'}{R}\,. \tag{a}$$

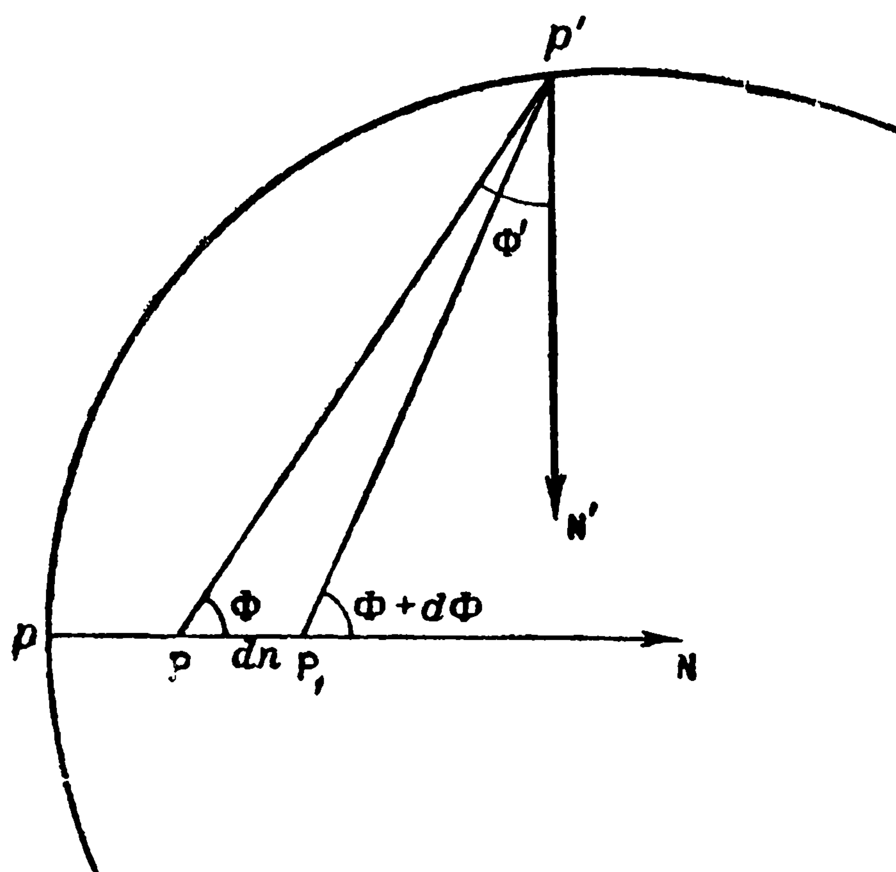
Доказав эти формулы, мы и получим искомый результат

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P=\int(\cos\vartheta+3\cos\Phi\cos\Phi')\frac{\mu'\,ds'}{R^3}\,.$$

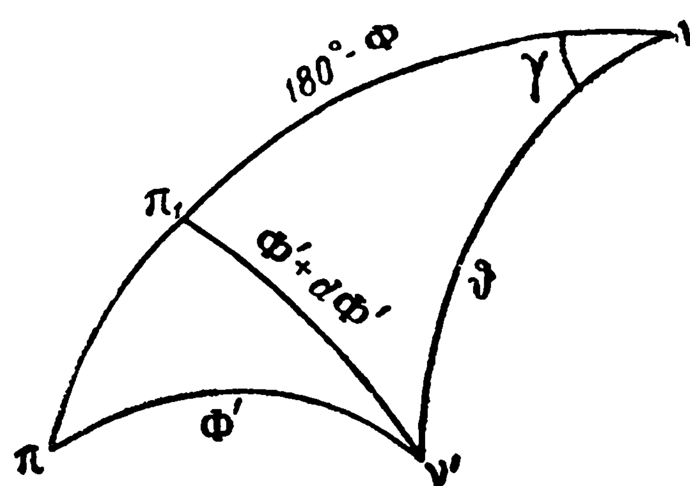
Докажем правильность формул (a).

Рассмотрим на нормали в точке p две бесконечно близкие точки P и P_1, разделенные расстоянием dn. Соединим эти точки прямыми Pp' и P_1p' с переменной точкой p' поверхности и рассмотрим трехгранный угол $p'PP_1N'$ с вершиной в точке p'; прямая $p'N'$ есть нормаль в точке p'. Из фиг. 1 видно, что плоский угол $Pp'P_1$ равен $d\Phi$; два других же плоских угла, $Pp'N'$ и $P_1p'N'$, равны соответственно Φ' и $\Phi'+d\Phi'$.

Возьмем теперь в пространстве какую-нибудь точку O и построим сферу единичного радиуса



Фиг. 1.



Фиг. 2.

с центром в этой точке. Проведем через точку O прямые, параллельные ребрам трехгранного угла $p'PP_1N'$, и соединим дугами больших кругов точки пересечения π, π_1, ν' этих прямых с поверхностью сферы; мы получим тогда сферический треугольник $\pi\pi_1\nu'$ (фиг. 2).

Проведем затем через точку O прямую, параллельную нормали pN; эта прямая пересечет поверхность сферы в некоторой точке ν, лежащей

на дуге большого круга $\pi\pi_1$. Длина дуги большого круга $\nu\nu'$ равна, очевидно, углу ϑ между нормалями в точках p и p'.

Рассмотрим сферический треугольник $\nu'\pi\nu$. Обозначая через γ угол $\nu'\nu\pi$ этого треугольника, имеем, по основной формуле сферической тригонометрии,

$$\cos\Phi' = \cos\vartheta\cos(180^\circ - \Phi) + \sin\vartheta\sin(180^\circ - \Phi)\cos\gamma. \qquad \text{(b)}$$

Продифференцируем обе части этой формулы по Φ, переходя, следовательно, от треугольника $\nu'\pi\nu$ к треугольнику $\nu'\pi_1\nu$; мы получим

$$\frac{d\cos\Phi'}{d\Phi} = \cos\vartheta\sin\Phi + \sin\vartheta\cos\Phi\cos\gamma;$$

и, подставив сюда вместо $\cos\gamma$ его значение из формулы (*b*), будем иметь

$$\frac{d\cos\Phi'}{d\Phi} = \frac{\cos\vartheta + \cos\Phi\cos\Phi'}{\sin\Phi}.$$

Из плоского треугольника PP_1p' фиг. 1 имеем по теореме синусов

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\sin\Phi}{R}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\cos\Phi'}{dn} = \frac{\cos\vartheta + \cos\Phi\cos\Phi'}{R}.$$

Рассмотрим производную $\frac{d}{dn}\frac{1}{R}$; имеем

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\frac{dR}{dn}.$$

Но легко найти, что

$$\frac{dR}{dn} = -\cos\Phi.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{R} = \frac{\cos\Phi}{R^2}.$$

Итак, формулы (a) доказаны.

7 (стр. 128). Пусть

$$I = \int\frac{ds'}{R^3}$$

и, принимая обычные обозначения, введем в рассмотрение следующие интегралы

$$I_0 = \int\limits_{(S_0)} \frac{ds'}{R^3}; \quad I_1 = \int\limits_{(S_1)} \frac{ds'}{R^3}.$$

Следовательно,

$$I = I_0 + I_1.$$

Рассмотрим интеграл I_0. Мы можем записать его так

$$I_0 = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\delta} [\rho^2 + (z-\zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} \frac{\rho d\rho}{\cos\vartheta_0}. \tag{a}$$

Отметим теперь следующее равенство

$$[\rho^2 + (z-\zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} = (\rho^2+\zeta^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{z^2 - 2z\zeta}{\rho^2+\zeta^2}\right]^{-\frac{3}{2}}. \tag{b}$$

Пользуясь неравенствами п. 1, можно показать, что для точек области S_0 и для всех значений ζ выражение

$$\left[1 + \frac{z^2 - 2z\zeta}{\rho^2+\zeta^2}\right]^{-\frac{3}{2}} \tag{c}$$

ограничено по своей абсолютной величине. В самом деле, мы имеем

$$\left|\frac{z^2-2z\zeta}{\rho^2+\zeta^2}\right| \leqslant \frac{z^2 + 2|z||\zeta|}{\rho^2+\zeta^2} < \frac{4a^2\rho^{2\alpha+2} + 4a|\zeta|\rho^{\alpha+1}}{\rho^2+\zeta^2} <$$

$$< 4a^2\rho^{2\alpha} + \frac{4a|\zeta|}{\rho^2+\zeta^2}\rho^{\alpha+1},$$

но

$$\frac{|\zeta|}{\rho^2+\zeta^2} \leqslant \frac{1}{2\rho},$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{z^2-2z\zeta}{\rho^2+\zeta^2}\right| < 4a^2\rho^{2\alpha} + 2a\rho^{\alpha}.$$

Но если радиус δ цилиндра C взять так, чтобы удовлетворялось, например, условие

$$2a\delta^{\alpha} < \frac{1}{2}, \tag{d}$$

то, в силу неравенства $\rho \leqslant \delta$, будем иметь

$$\left| \frac{z^2 - 2z\zeta}{\rho^2 + \zeta^2} \right| < \frac{3}{4}.$$

Отсюда вытекает, что для всех значений ζ выражение (c) будет ограничено по своей абсолютной величине некоторым числом N во всех точках области S_0.

Установив это, вернемся к формуле (a) и найдем, пользуясь формулой (b), неравенствами (4) п. 1 и (d), оценку для $|I_0|$

$$|I_0| < \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta} \frac{N}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho d\rho}{|\cos \vartheta_0|} < \frac{5}{4} 2\pi N \int_0^{\delta} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{5\pi N}{2|\zeta|} \left(1 - \frac{|\zeta|}{\sqrt{\delta^2 + \zeta^2}} \right) < \frac{5\pi N}{2|\zeta|}.$$

Отсюда видно, что произведение ζI_0 ограничено по своей абсолютной величине для всех значений ζ; полученная оценка не зависит от положения точки p на поверхности S.

Что же касается интеграла I_1, то величина R, входящая в него, будет для любого ζ больше, чем $\frac{1}{2}\delta$, если переменная точка интеграции находится вне цилиндра C, но внутри сферы второго условия, определяющего поверхности Ляпунова. Но, в силу этого же второго условия, оставшиеся точки интеграции уже не будут находиться внутри этой сферы, и для них R будет превосходить $\frac{1}{2}D$, если $|\zeta| < \frac{1}{2}D$. Итак

$$|I_1| < \frac{8}{\delta^3} \int_{(S_1)} ds'.$$

Отсюда вытекает, что произведение ζI_1 ограничено по своей абсолютной величине для малых $|\zeta|$ и при любом положении точки p на поверхности S.

Итак, если отношение $\frac{|\zeta|}{D}$ меньше $\frac{1}{2}$, то можно указать верхний предел для величины

$$\left|\zeta\int\frac{ds'}{R^3}\right|;$$

значение этого предела не зависит от положения точки p.

8 (стр. 129). Принцип Неймана был введен в исследование граничных задач теории потенциала при решении задач Дирихле и Неймана с помощью отыскания плотностей соответствующих потенциалов.

Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Дирихле; пусть граничные значения искомой гармонической функции W на поверхности S будут f.

Представим функцию W в виде потенциала двойного слоя неизвестной плотности μ. Принимая обозначения п. 6, мы находим, в силу формул (10), следующее уравнение для функции μ

$$\mu=\frac{f}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu'\cos\varphi'}{r^2}\,ds'. \qquad \text{(a)}$$

Для определения этой функции введем в уравнение (a) дополнительный параметр $\varkappa$ и рассмотрим обобщенное уравнение

$$\mu=\frac{f}{2\pi}+\frac{\varkappa}{2\pi}\int\frac{\mu'\cos\varphi'}{r^2}\,ds'. \qquad \text{(b)}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда по степеням $\varkappa$

$$\mu=\mu_0+\varkappa\mu_1+\varkappa^2\mu_2+\ldots. \qquad \text{(c)}$$

Подстановка этого ряда в уравнение (b) дает

$$\mu_0=\frac{f}{2\pi}; \quad \mu_m=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu_{m-1}\cos\varphi'}{r^2}\,ds', \qquad (m=1, 2, 3, \ldots).$$

По этой формуле могут быть вычислены последовательно все коэффициенты разложения (c). Можно доказать, что ряд (c) сходится, если $|\varkappa|$ достаточно мало. Но для получения решения уравнения (a) необходимо положить в ряде (c) параметр $\varkappa$ равным (-1). Здесь возникает основная трудность всего метода Неймана для решения задачи Дирихле, ибо невозможно доказать сходимость ряда (c) для $\varkappa=-1$. При исследовании вопроса о сходимости ряда (c) Нейман показал, что если поверх-

ность S выпуклая, то всегда возможно найти такое постоянное число C, что для всех значений индекса m будет иметь место неравенство[1]

$$|\mu_m - C| < L\lambda^m, \tag{d}$$

причем положительное число λ меньше единицы. В силу этого результата, именуемого «принципом Неймана», ряд

$$(\mu_0 - C) + x(\mu_1 - C) + x^2(\mu_2 - C) + \ldots \tag{e}$$

будет сходиться, по переменному x, внутри круга радиуса, большего, чем единица. Таким образом, аналитическая функция $\mu(x)$, определяемая своим элементом (с), может быть представлена в виде

$$\mu = [(\mu_0 - C) + x(\mu_1 - C) + x^2(\mu_2 - C) + \ldots] + \frac{C}{1 - x}.$$

Полагая здесь $x = -1$, получаем решение уравнения (а) и тем самым решение внутренней задачи Дирихле.

Метод Неймана, замечательный по своей простоте и ясности содержания, долгое время не мог быть применен к поверхностям иным, чем выпуклые. Но была полная уверенность в приложимости принципа Неймана к решению задач теории потенциала для весьма широкого класса поверхностей. В свете этой уверенности и следует рассматривать условный характер многих теорем глав II и III мемуара Ляпунова.

Первый существенный успех в распространении метода Неймана на невыпуклые поверхности был достигнут А. Пуанкаре в его работе «La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet» (Acta Mathematica, t. XX, 1897, pp. 59—142).

А. Пуанкаре указал путь доказательства принципа Неймана для весьма широкого класса поверхностей.

В ряде работ акад. В. А. Стеклова, собранных в его книге «Основные задачи математической физики» (ч. II, Петроград, 1923), метод Неймана исследуется с большой полнотой и дается доказательство принципа (d) для всех поверхностей, удовлетворяющих первым условиям Ляпунова (гл. V). Весь комплекс работ В. А. Стеклова, А. М. Ляпунова и других авторов по принципу Неймана подробно изложен в обзорных статьях Н. М. Гюнтера.[1]

На основе общих теорем теории интегральных уравнений принцип Неймана может быть установлен весьма просто.

---

[1] См. H. Poincaré. Théorie du potentiel newtonien. 1899, Ch. VIII.

[2] Н. М. Гюнтер. Труды В. А. Стеклова по математической физике (Сб. «Памяти В. А. Стеклова», Изд. АН СССР, Л., 1928; Успехи математических наук, т. I, 1946, вып. 3—4, стр. 23—43).

В самом деле, применяя теорию интегральных уравнений к уравнению (6), легко доказать, что $(x-1)\,\mu(x)$ есть функция, голоморфная внутри круга, с центром в начале координат и радиуса ρ, большего, чем 1. Мы имеем

$$(1-x)\,\mu(x)=\mu_0+x(\mu_1-\mu_0)+x^2(\mu_2-\mu_1)+\ldots,$$

и, в силу только что сказанного,

$$|\mu_n-\mu_{n-1}|<\frac{M}{\rho^n};\tag{f}$$

здесь M есть некоторое постоянное число.

Неравенство (f) является вторым выражением принципа Неймана. Покажем, что из него следует неравенство (d).

Действительно, составим ряд

$$\mu_m+(\mu_{m+1}-\mu_m)+(\mu_{m+2}-\mu_{m+1})+\ldots+(\mu_n-\mu_{n-1})+\ldots.$$

В силу неравенства (f), этот ряд абсолютно и равномерно сходится к некоторой функции γ; сумма $n-m+1$ членов этого ряда равна μ_n с увеличением индекса n до бесконечности функция μ_n равномерно стремится к функции γ. Благодаря этому, возможно в равенстве

$$\mu_n=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu'_{n-1}\cos\varphi'}{r^2}\,ds'$$

перейти к пределу под знаком интеграла, и мы получаем

$$\gamma=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\gamma'\cos\varphi'}{r^2}\,ds'.$$

Но в теории интегральных уравнений показывается, что это уравнение имеет лишь одно решение; его решением является постоянное число C, значение которого зависит от выбора функции f, положенной в основу определения функций μ_m. Итак, $\gamma=C$, т. е.

$$\mu_m+(\mu_{m+1}-\mu_m)+(\mu_{m+2}-\mu_{m+1})+\ldots=C$$

или

$$C-\mu_m=(\mu_{m+1}-\mu_m)+(\mu_{m+2}-\mu_{m+1})+\ldots.$$

Отсюда получаем, в силу неравенств (f),

$$|C-\mu_m|<\frac{M}{\rho^{m+1}}+\frac{M}{\rho^{m+2}}+\ldots=\frac{M}{\rho-1}\,\frac{1}{\rho^m}.$$

Таким образом, принцип Неймана в его первоначальной форме установлен.

9 (стр. 132). Отметим сначала, что если электростатическая плотность приводит к потенциалу, равному нулю внутри S, то он равен нулю и вне S, и из (5) следует, что и плотность тождественно равна нулю. Если существовало бы два непрерывных решения k_1 и k_2, то, в силу линейности задачи, простой слой плотности k_1+Ck_2 давал бы также решение при любом постоянном значении C. Потенциал V этого слоя будет иметь внутри поверхности постоянное значение, и мы можем надлежащим выбором числа C сделать это постоянное значение потенциала равным нулю. Отсюда вытекает, что плотность k_1+Ck_2 слоя равна тождественно нулю. Итак: $k_1=-Ck_2$. Но если интегралы

$$\int k_1\,ds \quad \text{и} \quad \int k_2\,ds$$

равны одному и тому же числу g, отличному от нуля, то $C=-1$ и $k_1\equiv k_2$.

10 (стр. 138). Сумма ряда

$$S=(v_{m+1}-v_{m+2})+(v_{m+3}-v_{m+4})+\ldots$$

равна следующему пределу

$$\lim_{p\to\infty}\left[(v_{m+1}-v_{m+2})+(v_{m+3}-v_{m+4})+\ldots+(v_{m+2p-1}-v_{m+2p})\right].$$

Мы можем преобразовать это выражение к виду

$$S=v_m-\lim_{p\to\infty}\left[(v_m-v_{m+1})+(v_{m+2}-v_{m+3})+\ldots+(v_{m+2p}-v_{m+2p+1})+\right.$$
$$\left.+(v_{m+2p+1}-C)+C\right]=v_m-\lim_{p\to\infty}\left[(v_m-v_{m+1})+(v_{m+2}-v_{m+3})+\right.$$
$$\left.+\ldots+(v_{m+2p}-v_{m+2p+1})\right]-\lim_{p\to\infty}(v_{m+2p+1}-C)-C=v_m-\mu_m-C.$$

11 (стр. 144). В самом деле, возьмем формулу

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i=4\pi k, \qquad \text{(a)}$$

вытекающую из формул (5), и проинтегрируем ее по поверхности проводника; мы получим

$$\int\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e ds=0, \qquad \text{(b)}$$

ибо $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i=0$. Возьмем теперь формулу

$$\int V\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e ds=\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau, \qquad \text{(c)}$$

где $d\tau$ есть элемент объема пространства E_e. На поверхности проводника V сохраняет постоянное значение. Благодаря этому из формулы (b) имеем

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что V является величиной постоянной в области E_e, а следовательно, и во всем пространстве. Отсюда следует, по формуле (a), что $k \equiv 0$.

Заметим, что для полной уверенности в правильности формулы (c) надо применить при выводе ее соображения пп. 15, 16, 17.

12 (стр. 147). Покажем сначала, что поверхность, описываемая точкой P, не имеет кратных точек. В самом деле, пусть для двух разных точек $p(x, y, z)$ и $p'(x', y', z')$ поверхности S мы имеем одну и ту же точку P, например в области E_i; тогда будем иметь равенства

$$\begin{aligned} x + \zeta \cos(n, x) &= x' + \zeta \cos(n', x), \\ y + \zeta \cos(n, y) &= y' + \zeta \cos(n', y), \\ z + \zeta \cos(n, z) &= z' + \zeta \cos(n', z). \end{aligned}$$

Из этих равенств мы получаем следующую формулу для расстояния

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

между точками p и p'

$$r = \zeta \sqrt{2(1 - \cos\vartheta)}. \tag{a}$$

Покажем, что при $2a\zeta < 1$ это равенство не может удовлетворяться. Действительно, в силу третьего условия, определяющего поверхности Ляпунова, имеем

$$1 - \cos\vartheta < 1 - \cos(ar^\alpha) < \frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\zeta \sqrt{2(1 - \cos\vartheta)} < a\zeta r^\alpha.$$

Если принять $\alpha = 1$ и параметру ζ придавать значения, меньшие, чем указанное выше число $\frac{1}{2a}$, то уравнению (a) невозможно будет удовлетворить.

При $\alpha < 1$ не представляется возможным, вообще говоря, доказать несостоятельность уравнения (a) для всех значений ζ, меньших некоторого предела, не зависящего от r.

В силу условия $\zeta < D$, точка P будет находиться внутри сферы, входящей во второе условие, определяющее поверхность Ляпунова, и, в силу этого, по тому же второму условию, не может принадлежать поверхности S. Следовательно, каждая из построенных параллельных поверхностей не имеет общих точек с поверхностью S.

Доказательство остальных свойств параллельных поверхностей — общеизвестно.

13 (стр. 149). В самом деле, значение функции V в точке P может быть представлено так:

$$V_P = V_p + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_p \zeta + \int_0^\zeta \left[\frac{\partial V}{\partial n} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_p\right] d\zeta. \qquad \text{(a)}$$

В силу непрерывности функции $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_p$ на поверхности S, существует такое постоянное число A, что для всех точек p имеем

$$\left|\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_p\right| < A.$$

Далее, в силу правильности нормальной производной, можно, задавшись произвольно малым числом ε, найти такое число l, не зависящее от положения точки p, что для всех значений ζ, удовлетворяющих неравенству $0 < \zeta < l$, будет иметь место неравенство

$$\left|\frac{\partial V}{\partial n} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_p\right| < \varepsilon.$$

Отсюда имеем, в силу формулы (a),

$$|V_P - V_p| < (A + \varepsilon)\zeta \text{ или } |V_P - f| < (A + \varepsilon)\zeta.$$

Это неравенство имеет место для значений ζ, меньших, чем l; число l не зависит от положения точки p.

14 (стр. 154). Действительно,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial n}\int \frac{h'\,ds'}{R}\right)_P;$$

но первое слагаемое правой части является, согласно допущению, высказанному в начале параграфа, правильным. Второе слагаемое изображает нормальную производную потенциала простого слоя непрерывной плотности и, следовательно, является также правильным. Следовательно, функция U обладает правильной нормальной производной.

15 (стр. 161). Число 3 в знаменателе написанного ниже неравенства должно быть устранено.

16 (стр. 162). Для получения этого неравенства заметим, что выражение $\Omega(0, \varepsilon) - \Omega(0, \delta)$ может быть записано так:

$$\Omega(0, \varepsilon) - \Omega(0, \delta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_\delta^\varepsilon \left[1 + \frac{3\cos\varphi\cos\varphi_0}{\cos\vartheta_0}\right] \frac{(f - f_0)\rho\, d\rho}{r_0^3},$$

где φ_0 есть значение Φ_0 для $\zeta = 0$. Это выражение может быть представлено в виде

$$\Omega(0, \varepsilon) - \Omega(0, \delta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_\delta^\varepsilon \frac{f - f_0}{r_0^3}\rho\, d\rho +$$
$$+ \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_\delta^\varepsilon z\left(\rho\frac{\partial z}{\partial\rho} - z\right)\frac{(f - f_0)\rho\, d\rho}{r_0^5}.$$

Первое слагаемое может быть оценено по неравенству (29), при замене предварительно r_0 через ρ (с учетом соответствующей погрешности); второе слагаемое оценивается весьма просто на основе выведенного выше неравенства

$$\left|\rho\frac{\partial z}{\partial\rho} - z\right| < 6a\rho^2$$

и неравенств

$$|f - f_0| \leqslant \eta; \quad r_0 \geqslant \rho.$$

После этих оценок получаем неравенство, указанное в тексте.

17 (стр. 167). Это неравенство достаточно установить в предположении, что точка p' находится от точки p на расстоянии меньшем, чем D. Возьмем точку p за центр сферы радиуса D; мы будем иметь

$$\left|\frac{\partial F}{\partial n} - \frac{\partial F'}{\partial n'}\right| < \left|\frac{\partial F}{\partial x}[\cos(n, x) - \cos(n', x)] + \frac{\partial F}{\partial y}[\cos(n, y) - \cos(n', y)] +\right.$$
$$\left.+ \frac{\partial F}{\partial z}[\cos(n, z) - \cos(n', z)]\right| + \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F'}{\partial x'}\right)\cos(n', x) +\right.$$
$$\left.+ \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F'}{\partial y'}\right)\cos(n', y) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F'}{\partial z'}\right)\cos(n', z)\right| <$$
$$< \sqrt{2(1 - \cos\vartheta_0)}\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} +$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F'}{\partial z'}\right)^2}.$$

Пользуясь неравенством $\cos \vartheta_0 > 1 - \frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}$ и указанным выше результатом о разностях частных производных функций F, получаем

$$\left| \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{\partial F'}{\partial n'} \right| < Br^{\alpha} + Cr,$$

где B и C — некоторые постоянные числа. Но, в силу неравенства $\alpha \leq 1$, можем написать

$$\left| \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{\partial F'}{\partial n'} \right| < Ar^{\alpha},$$

где A есть некоторое постоянное число.

18 (стр. 169). Неравенство

$$\left| \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n'} \right| < Cr^{\gamma},$$

в котором V есть потенциал объема, может быть получено применением вычислений примечания 17, если заметить, что величины

$$\frac{1}{r^k}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V'}{\partial x'}\right), \quad \frac{1}{r^k}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V'}{\partial y'}\right), \quad \frac{1}{r^k}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V'}{\partial z'}\right),$$

где $0 < k < 1$, ограничены сверху.

19 (стр. 171). В самом деле, функция $C - U$, гармоническая в области E_i, может быть представлена в этой области так:

$$C - U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(C-U)\cos\Phi'}{R^2} ds' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial (C-U)}{\partial n} \frac{ds'}{R}.$$

Прибавим к правой части этого выражения величину

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial n} \frac{ds'}{R} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{V \cos\Phi'}{R^2} ds',$$

равную нулю в области E_i. Мы получим

$$C - U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial (V+U)}{\partial n} \frac{ds'}{R}.$$

Отсюда вытекает, что плотность простого слоя, потенциал которого в совокупности с потенциалом U равен постоянной величине на поверхности слоя, есть

$$q = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (V + U)}{\partial n}.$$

20 (стр. 171). Формула

$$q = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (V + U)}{\partial n}$$

показывает, что для определения плотности q достаточно знать лишь нормальную производную функции V, существующей в области E_e. Но на S функция V принимает значения $C - U$; следовательно, по этим значениям надо найти нормальную производную $\frac{\partial V}{\partial n}$; эта же задача решается в п. 18 уравнением (28), в котором неизвестная функция h и равна $\frac{\partial V}{\partial n}$. Функция же L есть нормальная производная потенциала двойного слоя плотности $\frac{1}{2\pi}(C - U)$. Решение уравнения (28) в виде ряда и даст последнюю формулу п. 23.

21 (стр. 173). Это доказательство может быть проведено при помощи, например, формулы (25), как это делается и обычно, с имеющейся на основе полученных результатов возможностью строгого обоснования всех этапов необходимых рассуждений.

Член-корреспондент Академии Наук СССР

Л. Н. Сретенский.

Комментарий к работам по теории вероятностей

А. М. Ляпуновым были опубликованы только два мемуара, относящиеся к теории вероятностей: (1) статья «Sur une proposition de la théorie des probabilités», представленная С.-Петербургской Академии Наук 4 мая 1900 г., и (2) мемуар Nouvelle forme du théoréme sur la limite de probabilité», доложенный Академии 25 апреля 1901 г.

Несмотря на то, что эти работы, написанные в Харькове в течение одного лишь года и составляющие две быстро

следующие друг за другом части одного и того же исследования, являются, таким образом, коротким эпизодом в научном творчестве Ляпунова, значение их для теории вероятностей громадно.

В конце прошлого столетия важнейшей задачей теории вероятностей, фундаментальное значение которой ясно всякому математику, естествоиспытателю и статистику, было установление приложимости предельной теоремы Лапласа [см. стр. 1 мемуара (1)] к сумме случайных и независимых величин x_i при возможно более широких условиях. Как известно, П. Л. Чебышев в своем знаменитом мемуаре впервые указал метод (получивший название «метода моментов») для решения поставленной задачи при единственном предположении, что каждое из слагаемых x_i имеет конечные моменты, т. е. математические ожидания, м. о. $|x_i|^p = d_i^{(p)} < \infty$ для любой целой положительной степени p. Несколько уточнив рассуждения Чебышева, А. А. Марков (1898) доказал предельную теорему в следующем виде:[1]

Вероятность неравенства

$$z_1 < \frac{\sum_1^n x_i}{\sqrt{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}} < z_2$$

имеет пределом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

[1] Для упрощения письма полагаем все м. о. $x_i = \alpha_i = 0$ (так как всегда можно заменить случайную величину x_i ее отклонением $x_i - \alpha_i$); таким образом, м. о. $x_i^2 = d_i^{(2)} = a_i$, а м. о. $|x_i|^{2+\delta} = d_i^{2+\delta}$ Ляпунов обозначает просто через d_i, так как в ходе всех его рассуждений величина $\delta > 0$ остается неизменной.

если для всех целых значений $p > 2$ отношение

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^{(p)}}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]^{\frac{p}{2}}} = M_n^{(p)}$$

стремится к нулю при бесконечном возрастании n.

Эта замечательная теорема Чебышева — Маркова, далеко превосходящая по своей общности все, что было известно раньше, охватывает, в частности, обычный в статистике случай, когда все $|x_i| \leqslant L$ ограничены и $\sum_{1}^{n} a_i \to \infty$ при $n \to \infty$; так как тогда $d_i^{(p)} \leqslant a_i L^{p-2}$, и, следовательно,

$$M_n^{(p)} \leqslant \frac{L^{p-2} \sum_{1}^{n} a_i}{\left[\sum_{1}^{n} a_i\right]^{\frac{p}{2}}} = \frac{L^{p-2}}{\left[\sum_{1}^{n} a_i\right]^{\frac{p-2}{2}}} \to 0.$$

Сравнивая приведенную нами формулировку предельной теоремы Маркова с окончательной формулировкой Ляпунова [стр. 3 в мемуаре (2)], мы видим существенное принципиальное преимущество последней. В то время, как Марков, вслед за Чебышевым, ограничивается рассмотрением только таких случайных величин x_i, бесконечно возрастающие значения которых (если они возможны) настолько маловероятны, что м. о. $|x_i|^p = d_i^{(p)} < \infty$ при сколь угодно больших целых $p = 2 + \delta$ имеют смысл, Ляпунов требует лишь, чтобы существовало хоть одно значение $p = 2 + \delta$ $(\delta > 0)$ (где p может и не быть целым числом), для которого $d_i^{(2+\delta)} < \infty$. При этом, что особенно важно в формулировке Ляпунова, бесконечное число условий Маркова: $M_n^{(p)} \to 0$ при *всех*

целых $p > 2$ заменяется *единственным условием, соответствующим лишь одному какому-нибудь значению* $\delta > 0$.

Этот классический результат Ляпунова, представляющий венец его исследований по теории вероятностей, был получен им не сразу. В первой своей работе Ляпунов ограничивается случаем $\delta = 1$, т. е. $p = 3$, но ему еще не удается заменять все условия Маркова единственным условием $M_n^{(3)} \to 0$ [как видно из п. 3, стр. 5, мемуара (2), из одной только леммы п. 1 (стр. 2) вытекает, что выполнение какого-нибудь одного условия Маркова $M_n^{(p)} \to 0$ $(p = 2 + \delta > 3)$ также влечет за собой $M_n^{(p')} \to 0$ для всех $p' < p$, т. е. в частности $M_n^{(3)} \to 0$, так что все заключения первой работы без дополнительных вычислений автоматически распространяются на случай любого одного целого значения $\delta > 1$]. Последовательно преодолевая представившиеся при применении его метода технические трудности, Ляпунов был вынужден сначала внести дополнительное ограничение, что все м. о. $|x_i|^3 = d_i^{(3)} \leqslant L^3$ равномерно ограничены, и вместо условия $M_n^{(3)} = \dfrac{\sum_1^n d_i^{(3)}}{A^{\frac{3}{2}}} \to 0$, где $A = \sum_1^n a_i$, он требовал (в первой работе) соблюдения условия $\dfrac{n^{\frac{2}{3}} L^2}{A} \to 0$, которое несколько более ограничительно, чем $M_n^{(3)} \to 0$, так как

$$M_n^{(3)} \leqslant \frac{nL^3}{A^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{n^{\frac{2}{3}} L^2}{A}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

В заметке в «Comptes Rendus», представленной Парижской Академии 21 января 1901 г., Ляпунов дает уже теорему первой работы, обобщенную в том отношении, что вместо $\delta = 1$ он полагает $0 < \delta \leqslant 1$ (т. е., в сущности, любое $\delta > 0$) но окончательного результата второго мемуара здесь еще нет.

Доказательство предельной теоремы методом моментов основано на теореме Чебышева (вытекающей из его исследований об экстремальных значениях определенных интегралов), согласно которой можно утверждать, что равенство моментов всех целых степеней случайной величины Y соответствующим нормальным моментам[1] влечет за собой, что при любых $z_1 < z_2$ вероятность неравенств

$$z_1 < Y < z_2$$

равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dt$. Благодаря этому предельная теорема Чебышева — Маркова являлась следствием того факта, что из бесконечной совокупности предельных равенств $M_n^{(p)} \to 0$ вытекают все требуемые предельные равенства

$$\lim_{n=\infty} \text{м. о.} \frac{\left[\sum\limits_1^n x_i\right]^p}{\left[\sum\limits_1^n a_i\right]^{\frac{p}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, t\, dt \quad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство Ляпунова проводится совершенно новым методом, получившим название метода «*характеристических функций*», который оказался настолько мощным, что занял впоследствии центральное место в теории вероятностей. Сущность метода очерчена Ляпуновым в п. 2 его первой работы, а в п. 9 он выясняет, что полученная им верхняя грань погрешности Δ предельной формулы, выведенная им в частном предположении, что каждая из случайных величин x_i может получать *любое конечное* число значений, остается в силе и в самом общем случае. Оценка этой погрешности, осуществленная Ляпуновым с непревзойденным

---

[1] Т. е. м. о. $Y^{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{2k}\, dt = 1 \cdot 3 \ldots (2k-1)$,

м. о. $Y^{2k-1} = 0 \quad (k \geqslant 1)$.

мастерством, не может быть существенно улучшена. Среди различных технических подробностей доказательства особого внимания заслуживает введение Ляпуновым (п. 3) дополнительного достаточно малого независимого слагаемого ξ, подчиняющегося соответствующему нормальному закону вероятностей. Почти все позднейшие доказательства предельной теоремы, каков бы ни был их принцип, используют это остроумное изобретение Ляпунова, так как закон вероятностей независимых величин сразу приближается к нормальному после присоединения такого соответствующим образом подобранного слагаемого.

Вскоре после открытия Ляпунова Марков, благодаря простому, но принципиально важному замечанию, также получает результат Ляпунова. Замечание Маркова сводится к следующему.

Условие $M_n^{(p)} \to 0$ для какого-нибудь $p > 2$ выражает, что, хотя слагаемые x_i могут быть сколь угодно велики, но вероятность получения ими значений порядка $\sqrt{A}$ так мала, что сочтя столь большие значения их невозможными, мы не изменим предельного закона вероятностей для их суммы; но к измененной таким образом сумме теорема Маркова уже применима.

При помощи аналогичного замечания мне было нетрудно в 1926 г. заменить достаточное условие Ляпунова еще немного более общим условием, где отдельные слагаемые x_i могут даже не иметь конечных дисперсий, условием, которое является не только достаточным, но, в известном смысле, и необходимым для предельной применимости нормального закона к сумме независимых величин.

Следует отметить, что условие Ляпунова при каждом данном p $(M_n^{(p)} \to 0)$ является также в некотором, не лишенном практического интереса, смысле условием, одновременно достаточным и необходимым. Действительно, бесконечная совокупность условий Маркова $(M_n^{(p)} \to 0)$ выражает не только то, что закон вероятностей суммы $Y = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{1}^{n} x_i$ имеет пре-

делом нормальный закон, но также и то, что все ее моменты стремятся к нормальным, так как при применении метода моментов Чебышева — Маркова оба эти факта не отделимы. Напротив, условие Ляпунова для некоторого одного только данного $p>2$, имеющее, как мы видели, автоматическим следствием соблюдение соответствующих условий для всех значений меньше p, ничего не предполагает относительно моментов высших степеней, которые, вообще, могут и не существовать. Но можно показать, а для целого четного p это непосредственно вытекает из рассуждений Маркова, что условие Ляпунова порядка p равнозначно тому, что математическое ожидание $|Y|^p$ имеет пределом соответствующее нормальное математическое ожидание. Таким образом, условие Ляпунова порядка p или равноценное ему единственное условие, что момент степени м. о. $|Y|^p$ имеет пределом соответствующий нормальный момент, необходимо и достаточно для того, чтобы закон вероятностей для суммы $Y=\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_1^n x_i$ стремился к нормальному закону и одновременно все его моменты не выше порядка p стремились к нормальным моментам.

Необходимость условия $M_n^{(p)}\to 0$ Ляпунова имеет место при дополнительном предположении, что $\frac{a_i}{A}\to 0$ равномерно при всех $i\leqslant n\to\infty$.

Отметим еще два обстоятельства, связанные с первым мемуаром Ляпунова. В предисловии к этому мемуару упоминается о том, что условие в теореме Чебышева недостаточно в частном случае закона больших чисел. Под законом больших чисел автор, очевидно, подразумевает здесь, согласно распространенной в XIX в. терминологии, приложение предельной формулы Лапласа в схеме Пуассона, т. е. к выражению $m-(p_1+p_2+\ldots+p_n)$, где m — число появлений события, имеющего в каждом из независимых опытов вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Предельная формула,

действительно, не применима, если $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$ не растет бесконечно с возрастанием n.

В формулировке основной теоремы в п. 1 первого мемуара вместо A стоит nA. Изменение обозначений сделано нами для того, чтобы привести в соответствие обозначения первого мемуара с обозначениями второго мемуара Ляпунова, который является завершением единого исследования.

Перевод работ Ляпунова был выполнен Н. А. Сапоговым.

Академик *С. Н. Бернштейн.*

Комментарий к работе «Исследования в теории фигуры небесных тел»

Работа А. М. Ляпунова «Исследования в теории фигуры небесных тел» появляется на русском языке впервые. Эта работа, под заглавием «Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes», была опубликована Ляпуновым в 1903 г. по-французски в «Записках Академии Наук» (VIII серия, т. XIV, № 7).

Исследование Ляпунова занимает особое место в ряду основных работ по теории фигуры небесных тел, основанной трудами Гюйгенса и Ньютона. Верный своему научному credo — «*... если иной раз и возможно пользоваться неясными рассмотрениями, когда желают установить новый принцип, который логически не вытекает из того, что было уже принято и который, по своей природе, не может быть в противоречии с другими принципами науки, однако же непозволительно этого делать, когда должны решать определенную задачу (из Механики или Физики), которая поставлена совершенно точно с точки зрения математической. Эта задача делается тогда проблемой математического анализа и должна решаться как таковая*»,[1] — Ляпунов предлагает в своем иссле-

[1] Sur un théorème de Tchebychef. Записки Академии Наук, VIII серия, т. XVII, № 3, стр. 3.

довании математически законченное и безупречно строгое решение задачи об определении формы медленно вращающейся неоднородной массы жидкости, все частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона.

Ньютон показал в «Principia», что под влиянием центробежных сил и взаимного притяжения своих частиц однородная масса жидкости принимает, при малой угловой скорости, форму сжатого эллипсоида вращения.[1] Сжатие этого эллипсоида равно, по теории Ньютона, пяти четвертям отношения центробежной силы на экваторе к ускорению силы тяжести. Для Земли это отношение равно 1:289; отсюда получается первое, из теоретических соображений найденное, значение сжатия Земли; оно равняется 1 : 231.

Следующий большой вклад в теорию фигуры Земли был сделан Клеро. Имея свой задачей разъяснить ряд мест в «Principia» и дать объяснение результатов, полученных Лапландской экспедицией Французской Академии наук (1736), Клеро построил общую теорию фигур равновесия неоднородной жидкости, обладающей медленным вращением.[2]

В основу своей теории Клеро положил допущение, что поверхности равной плотности жидкости являются поверхностями эллипсоидов вращения. Метод Клеро является приближенным и не дает возможности развить процесс последовательных приближений для получения точного решения.

Следующие значительные работы по теории фигур небесных тел — это работы Лапласа.[3]

---

[1] И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, кн. III, предлож. XIX, задача III; предлож. XX, задача IV.

[2] A. Clairaut. Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique (Paris, 1743). Русский перевод этой книги (Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики) издан Академией Наук в 1947 г.

[3] Laplace. Traité de mécanique céleste. (t. II, livre III, Ch. II, IV; t. V, livre XI, Ch. II).

Лапласу принадлежит, по существу дела, два метода трактовки задачи о фигурах равновесия неоднородной жидкости. Эти два метода не страдают произвольным допущением Клеро о форме поверхностей равной плотности, но в результате исследования оказывается, что, при малой угловой скорости, в первом приближении эти поверхности действительно будут эллипсоидами вращения.

Первый, наиболее разработанный Лапласом метод, основан на расслоении всей неоднородной массы на бесконечно тонкие однородные слои, ограниченные поверхностями двух деформированных сфер, и при вычислении ньютоновского потенциала каждый такой слой уподобляется простому слою притягивающего вещества, распределенного на некоторой средней сфере. Соотношение между коэффициентами разложения потенциала в ряд сферических функций и коэффициентами разложения в такой же ряд величины отклонения поверхности слоя от средней сферы находятся Лапласом с помощью устанавливаемой им формулы разрыва нормальных производных потенциала простого слоя. Пользуясь, затем, основным уравнением гидростатики, Лаплас находит для определения коэффициентов разложения отклонения поверхности равной плотности от сферы некоторое линейное дифференциальное уравнение второго порядка; это уравнение совпадает с уравнением Клеро, определяющим сжатие поверхности равной плотности.

По самому своему характеру этот метод Лапласа не дает возможности продвинуться далее первого приближения, степень точности которого трудно, вместе с тем, и оценить. Интересно отметить, что известные изыскания Пуанкаре о фигурах равновесия, близких к эллипсоидальным, имеют в своей основе прием первого метода Лапласа.

Второй метод Лапласа, позволяющий продвинуться как угодно далеко в построении последовательных приближений, изложен Лапласом несколько бегло. Подробное его

изложение и развитие можно найти в курсе небесной механики Тиссерана.[1]

Краткое изложение основ теории Лапласа вместе с критикой слабых сторон этой теории помещено в конце лекции Ляпунова «О форме небесных тел».[2]

После работ Лапласа внимание ученых, работавших в XIX в. в области теории фигуры небесных тел, было обращено на получение всевозможных следствий из уравнений теории Клеро и Лапласа и на сравнение выводов этой теории с геодезическими и астрономическими измерениями.[3]

Но вплоть до работ Ляпунова не предпринималась коренная ревизия основ теории Лапласа и замена ее новой, математически строгой теорией.

В мемуаре «Исследования в теории фигуры небесных тел» и строится эта теория в духе общего взгляда Ляпунова на те требования, которым должно удовлетворять решение каждой задачи теоретической механики.

Основной результат исследования Ляпунова заключается в том, что, при наложении определенных требований на плотность жидкости, существует, для всех значений угловой скорости вращения, не превосходящих определенного предела, фигура равновесия вращающейся массы неоднородной жидкости, находящейся в поле своего собственного тяготения.

По характеру содержания все исследование Ляпунова может быть разделено на две части. В первой части дается, со всеми подробностями, вывод основного нелинейного интегрального уравнения задачи, — свободный от спорных приемов Лапласа; затем указывается метод решения этого уравнения и устанавливается связь с исследованиями Клеро.

---

[1] F. Tisserand. Traité de Mécanique Céleste, II, 1891, XVIII, XIX.

[2] См. стр. 320 настоящего сборника.

[3] P. Appel. Traité de Mécanique Rationelle, tt. IV, II, 1937. — R. Wavre. Figures planétaires et géodesié. 1932.

Вторая часть мемуара содержит лишь резюме не опубликованных полностью дальнейших исследований. В этой части разбирается вопрос о сходимости ряда, решающего нелинейное интегро-дифференциальное уравнение задачи. Не приводя подробных вычислений, Ляпунов указывает вид мажорантных функций для упомянутого ряда и его производных.

К мемуару «Исследования...» примыкает другая работа Ляпунова: «Sur l'equation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes», являющаяся, в известной мере, продолжением первой.[1] Главной целью этой второй работы является исследование уравнения Клеро в наиболее общих предположениях о характере изменения плотности жидкости при проникновении в глубь ее. В то время как до Ляпунова исследование уравнения Клеро велось в предположении задания аналитического вида плотности жидкости в зависимости от глубины, Ляпунов разбирает уравнение Клеро, отказываясь от принятия того или иного аналитического выражения для плотности. Он предполагает лишь, что плотность жидкости убывает при перемещении к поверхности и допускает возможность существования у функции, представляющей плотность жидкости, даже бесконечного (счетного) множества точек разрыва. Для исследования уравнения Клеро в таком общем предположении Ляпунову потребовалось ввести обобщение понятия интеграла в направлении Стильтьеса.

Выше было указано, что «Исследования...» не содержит полностью проведенного доказательства сходимости рядов, решающих задачу о фигуре небесных тел. Но в работе «Sur l'équation de Clairaut...» содержатся основные неравенства, которые позволяют восстановить все детали построения уравнений для мажорантных функций, указанных в работе «Исследования...»

[1] Записки Академии Наук, VIII серия, т. XV, № 10, 1904, стр. 1—66.

Выше мы подчеркивали лишь математическое значение «Исследования...» и связанного с ним мемуара «Sur l'équation de Clairaut...». Однако же, было бы односторонне рассматривать эти работы лишь как безупречное по строгости математическое изыскание. Ляпунов ограничивается установлением общих формул или указанием путей для их получения, не давая, большею частью, подробного исследования полученных им результатов.[1]

Но несомненно, что в общих формулах Ляпунова содержатся самые разнообразные свойства фигур равновесия неоднородной жидкости, и на основании этих формул можно выяснить ряд вопросов, не разрешимых теорией Клеро — Лапласа.

Приведем теперь примечания к некоторым отдельным местам работы.

1 (стр. 256). См. мемуар А. М. Ляпунова «Sur l'équation de Clairaut...». Записки Академии Наук, т. XV, № 10, 1904, стр. 1—66.

2 (стр. 263). Функция $\sqrt{1+2\varepsilon v+\varepsilon^2 w}$ переменного ε может быть разложена в ряд по степеням ε, сходящийся внутри окружности с центром в точке $\varepsilon=0$, проходящей через особую точку этой функции, ближайшую к началу координат.

Рассматриваемая функция имеет две особые точки ветвления

$$\varepsilon_1=-\frac{1}{w}\left(v+i\sqrt{w-v^2}\right);\quad \varepsilon_2=-\frac{1}{w}\left(v-i\sqrt{w-v^2}\right);$$

в этих точках сумма $1+2\varepsilon v+\varepsilon^2 w$ обращается в нуль. Из написанных формул следует, что $|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=\frac{1}{\sqrt{w}}$, и потому степенной ряд для функции $\sqrt{1+2\varepsilon v+\varepsilon^2 w}$ будет сходиться при $\varepsilon=1$, если $\sqrt{w}<1$.

3 (стр. 264). Применение теоремы о конечном приращении.

---

[1] О значении «Исследования...» как вступления к решению более сложных задач теории фигур равновесия вращающейся жидкости см. лекцию «О форме небесных тел».

4 (стр. 264). В самом деле, их произведение, равное $\sqrt{aa'}\,(\sqrt{a}-\sqrt{a'})^2$, не отрицательно.

5 (стр. 265). Действительно, если $a' < a$, то

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = \frac{1}{a'} \int \frac{d\sigma'}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{a'}\right)^2 - 2\frac{a}{a'}\cos\varphi}},$$

если же $a' > a$, то

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = \frac{1}{a} \int \frac{d\sigma'}{\sqrt{1+\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 2\frac{a'}{a}\cos\varphi}}.$$

Первый из этих интегралов представляет собою потенциал однородного сферического слоя плотности 1 вне сферы единичного радиуса, на расстоянии $\frac{a}{a'}$ от ее центра, и равен $\frac{4\pi a'}{a}$. Аналогично значение второго интеграла есть $\frac{4\pi a}{a'}$. Следовательно,

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = \begin{cases} \frac{4\pi}{a} & \text{при } a' < a \\ \frac{4\pi}{a'} & \text{при } a' > a. \end{cases}$$

В силу этих формул, имеем

$$U_0 = \int_0^a \rho' a'^2 da' \int \frac{d\sigma'}{D} + \int_a^A \rho' a'^2 da' \int \frac{d\sigma'}{D} =$$

$$= \frac{4\pi}{a} \int_0^a \rho' a'^2 da' + 4\pi \int_a^A \rho' a' da'.$$

Это и есть формула, указанная в тексте.

6 (стр. 266). Проверим формулу для R_n. Мы имеем, вводя параметр ε,

$$R = \int \frac{a'^2 (1+\varepsilon\zeta')^2 d\sigma'}{\sqrt{a^2(1+\varepsilon\zeta)^2 + a'^2(1+\varepsilon\zeta')^2 - 2aa'(1+\varepsilon\zeta)(1+\varepsilon\zeta')\cos\varphi}}.$$

Положив для краткости

$$p = a + \varepsilon a\zeta, \quad q = a' + \varepsilon a'\zeta',$$

получим

$$R = \int \frac{q^2\, d\sigma'}{\sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi}}\,.$$

Разложим этот интеграл в ряд Тэйлора по степеням разностей $p-a$, $q-a'$. Совокупность членов порядка n этого разложения запишется так:

$$\int \frac{d\sigma'}{n!} \sum_{i+j=n} C_n^i (p-a)^i (q-a')^j \left\{\frac{\partial^n}{\partial p^i\, \partial q^j} \frac{q^2}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\varphi}}\right\}_{p=a,\, q=a'}$$

и, выполняя несложные преобразования, получим

$$\varepsilon^n \sum_{i+j=n} \frac{a^i \zeta^i}{i!\, j!} \int (a'\zeta')^j \left\{\frac{\partial^n}{\partial p^i\, \partial q^j} \frac{q^2}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\varphi}}\right\}_{p=a,\, q=a'} d\sigma',$$

или

$$\varepsilon^n \sum_{i+j=n} \frac{a^i \zeta^i}{i!\, j!} \int \left\{\frac{\partial^n}{\partial p^i\, \partial q^j} \frac{(a'\zeta')^j q^2}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\varphi}}\right\}_{p=a,\, q=a'} d\sigma',$$

или, наконец,

$$\varepsilon^n \sum_{i+j=n} \frac{a^i \zeta^i}{i!\, j!} \left\{\frac{\partial^n}{\partial p^i\, \partial q^j} \int \frac{(a'\zeta')^j q^2\, d\sigma'}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\varphi}}\right\}_{p=a,\, q=a'}.$$

Это и дает, с точностью до обозначений, формулу, указанную в тексте для R_n. Совершенно так же может быть установлена и формула для S_n.

7 (стр. 267). Это легко получается на основании указанных в прим. 5 значений интеграла

$$\int \frac{d\sigma'}{D}\,.$$

8 (стр. 274). Здесь, и во всем дальнейшем, под $Y_m(\theta, \varphi)$ подразумевается сферическая функция общего вида порядка m, т. е. линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами из $2m+1$ элементарных сферических функций порядка m.

Эти последние функции составляются через полиномы Лежандра $P_m(\mu)$, где $\mu = \cos\theta$, следующим образом:

$$P_m(\mu); \quad (1-\mu^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_m(\mu)}{d\mu^k} \cos k\psi; \quad (1-\mu^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_m(\mu)}{d\mu^k} \sin k\psi,$$

причем k принимает значения: $1, 2, \ldots, m$.

9 (стр. 275). Подробное изложение всех этих результатов дано в мемуаре «Sur l'équation de Clairaut...».

10 (стр. 280). Формула $\int F^2 d\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m{}^2$ представляет собою равенство Парсеваля или уравнение замкнутости для сферических функций. Доказательство его можно найти в третьей главе работы Ляпунова «Problème de minimum dans une question de stabilité...». (Записки Академии Наук, т. XXII, № 5, 1908, стр. 1—140).

Более простое доказательство равенства нулю функции F при равенстве нулю всех чисел Q дано Ляпуновым в мемуаре «Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation» (1-re partie, p. 36).

11 (стр. 284). См. мемуар «Sur l'équation de Clairaut...».

12 (стр. 291). Содержание п. 9 представляет собою изложение результатов неопубликованного исследования сходимости рядов для функции ζ и ее частных производных.

Хотя подробного изложения этого исследования и нет, тем не менее можно видеть, как оно было выполнено.

Определение коэффициентов разложения функции ζ_n в ряд сферических функций достигается решением уравнения (18). В мемуаре «Sur l'équation de Clairaut...» (п. 31) Ляпунов находит следующее неравенство для решения z уравнения (18):

$$|z| < \frac{2m+1}{2(m-1)} \frac{A^3 L}{\int\limits_0^A \rho a^2 da},$$

где L есть наибольшее значение функции W в интервале $(0, A)$.

Это неравенство, в соединении с неравенствами пп. 2, 4, позволяет составить известными приемами те алгебраические уравнения (26), решения которых l, g, h, представленные в виде рядов по степеням $\varkappa$, и будут служить мажорантными рядами для ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\mu^2}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial a}$.

В условиях более сложной задачи об определении фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, этот прием построения мажорантных рядов с помощью составления алгебраических уравнений подробно изложен в главе IV первого мемуара Ляпунова «Sur les figures d'équilibre...».

Член-корреспондент Академии Наук СССР

Л. Н. Сретенский.

ПРИМЕЧАНИЕ К ЛЕКЦИИ А. М. ЛЯПУНОВА «О ФОРМЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ»



Приводимое ниже примечание принадлежит акад. А. Н. Крылову. Оно было напечатано вместе с упомянутой лекцией в «Известиях Академии Наук СССР» (1930, № 1):

> В начале лета 1917 года ординарный академик Российской Академии Наук Александр Михайлович Ляпунов приехал на лето к своему брату в Одессу на отдых. Политические обстоятельства не позволили ему в конце лета снова вернуться в Петроград, и все последующее время до своей трагической кончины Александр Михайлович оставался в Одессе. Физико-математический факультет Новороссийского университета обратился к нему с просьбой прочесть лекции в университете на тему, которую избрать он пожелает. Александр Михайлович принял это предложение и объявил к осени 1918 года курс под заглавием: «О форме небесных тел». Содержание этого курса намечено было в первой, вступительной лекции. Всех двухчасовых лекций было прочитано семь. Лекции эти записывались его слушателями. После его смерти осталась рукопись, связанная с работой над лекциями. Что касается первой, вступительной лекции, то она была написана в законченном виде и лишь конец ее был приведен на лекции без предварительного изложения в рукописи.

После смерти Александра Михайловича, последовавшей 21 октября (3 ноября) 1918 года, Физико-математический факультет избрал комиссию в составе профессоров А. Д. Билимовича, Е. А. Буницкого, И. М. Занчевского и А. Я. Орлова для сохранения трудов, оставшихся после покойного, и для издания тех из них, издать которые представится возможным.

Из этих трудов рукопись обширного сочинения «Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation» была передана в Академию Наук и издана в 1925 г., подготовленная же к печати рукопись упомянутой лекций была направлена комиссией в Госиздат и им возвращена академику Б. М. Ляпунову, по поручению которого она была представлена мною в заседании 29 октября с. г. Отделения физико-математических наук, которое и постановило напечатать эту лекцию в «Известиях Академии Наук».

Академик *А. Крылов.*



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ПЕЧАТНЫХ ТРУДОВ И МАТЕРИАЛОВ О ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ А. М. ЛЯПУНОВА[1]

I. Работы А. М. Ляпунова, опубликованные в печати

1. Научные труды

1881

1. О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы. (Кандидатская диссертация). — Журн. Русск. физ.-хим. общ., СПб., 1881, т. XIII, вып. 5, Физич. отд., стр. 197—238; вып. 6, стр. 273—307.

То же. Отд. оттиск. СПб. 77 стр.

Предварительное сообщение об этой работе. — Журн. Русск. физ.-хим. общ., СПб., 1881, т. XIII, вып. 4, Физич. отд., проток. 28-го засед. Физич. отд. 3 марта 1881 г., стр. 192—193.

Рефераты: 1) Beibl. zu den Ann. der Phys. und Chem., Leipzig, 1882, Bd. VI, SS. 62—63. Подписано: A. St.; 2) Journ. de phys. théor. et appl., Paris, 2 série, 1882, t. I, p. 75. Подписано: W. Lermantoff.

---

[1] Библиографический указатель печатных трудов академика А. М. Ляпунова и литературы о его жизни и деятельности (книги, журнальные статьи, краткие сообщения) делится на три части: 1. Работы А. М. Ляпунова, опубликованные в печати; 2. Материалы о жизни и деятельности А. М. Ляпунова; 3. Основная научная литература, связанная с работами А. М. Ляпунова. В каждом разделе библиографические описания книг, журнальных статей или кратких сообщений расположены в хронологическом порядке. Во 2-м и 3-м разделах литература приведена лишь выборочно.

2. О потенциале гидростатических давлений. — Журн. Русск. физ-хим. общ., СПб., 1881, т. XIII, вып. 8, Физич. отд., стр. 249—376.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1881. 24 стр.

1884

3. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. (Магистерская диссертация). СПб. 1884. XV, 109, IV стр.

То же. Перевод на франц. яз. под загл.: Sur la stabilité des figures ellipsoidales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation. — Ann. de la faculté des sciences de l'Univ. de Toulouse, 2 série, 1904, t. VI, pp. 5—116.

То же. Отд. оттиск. [Paris. 1904]. 116 pp.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1884, Bd. XVI, SS. 793—794. Подписано: Lw. [Liapunow], 2) Там же. Jg. 1904, Bd. XXXV, SS. 709—710. Подписано: Lp. [Lampe]; 3) Bull. astron., Paris, 1885, t. II, pp. 522—525. Подписано: R. R. [R. Radau].

Библиография составлена в результате просмотра основных физико-математических журналов, изданий с рефератами физико-математических трудов и опубликованных протоколов Общего собрания и Физико-математического отделения Академии Наук и Харьковского математического общества.

Все библиографические описания составлены de visu. Исключения допущены для нескольких изданий, отмеченных знаком *. Они отсутствуют в основных библиотеках Ленинграда, и их описания составлены Библиотекой Математического института Академии Наук СССР в Москве.

До настоящего времени работы А. М. Ляпунова учитывались лишь частично в списках, выходивших при его жизни, а именно: 1) в списке трудов, помещенном во втором приложении к протоколу Общего собрания Академии Наук от 1 сентября 1901 г. (23 названия); 2) в перечне ученых трудов, помещенном в книге „Физико-математический факультет Харьковского университета“ (31 название) и 3) в списке трудов, вошедшем в первую часть „Материалов для биографического словаря действительных членов Академии Наук“ (38 названий).

Библиографический указатель составлен в Научно-библиографическом отделе Библиотеки Академии Наук СССР А. М. Лукомской под редакцией академика В. И. Смирнова. Общее библиографическое руководство работой принадлежит К. И. Шафрановскому.

1885

4. Некоторое обобщение формулы Лежень — Дирихле для потенциальной функции эллипсоида на внутреннюю точку. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив., 1-я серия, 1885, кн. 2, стр. 120—130.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1886. 11 стр.

1886

5. О теле наибольшего потенциала. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив., 1-я серия, 1886, кн. 2, стр. 63—73.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1886. 11 стр.

1888

6. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1888, т. I, стр. 7—60.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1888. 54 стр.

Доложено в заседании 22 января 1888 г.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1888, Bd. XX, SS. 1001—1003. Подписано: Ms. [Mestchersky].

1889

7. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1889, т. II, № 1—2, стр. 1—94.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1889. 94 стр.

Доложено в заседаниях 19 января и 16 февраля 1889 г.

Рефераты: 1) Jahrb. über. die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1889, Bd. XXI, SS. 924—925. Подписано: Bb. [Bobylew]; 2) Bull. astron., Paris, 1889, t. VI, pp. 481—488. Подписано: R. R. [R. Radau].

1892

8. Общая задача об устойчивости движения. Харьков. 1892. XI, 250 стр.

То же. Перев. на франц. яз. под загл.: Problème général de la stabilité du mouvement. — Ann. de la faculté des sciences de l'Univ. de Toulouse, 2 série, 1908, t. IX, pp. 203—474.

То же. Отд. оттиск. [Paris. Toulouse]. 1908. 203—474 pp.

То же. Фотографическое воспроизведение. — Ann. of mathem. studies, 1947, № 17.

То же. Диссертация и статьи. 2-е изд. Л.—М. 1935. 386 стр., 1 л. портр.

Содержание: 1. Общая задача об устойчивости движения (стр. 1—278). — 2. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения (стр. 280—343). — 3. К вопросу об устойчивости движения (стр. 344—351). — 4. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть maximum (Перевод из Journ. de mathém., 5 série, 1897, t. III) (стр. 352—362). — 5. В. А. Стеклов. А. М. Ляпунов. Некролог (стр. 364—382).

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Jg. 1892, Bd. XXIV, SS. 876—880. Подписано: Jk. [Joukovsky]; 2) Bull. astron., Paris, 1892, t. IX, pp. 456—458. Подписано: R. R. [R. Radau].

1893

9. К вопросу об устойчивости движения. (Дополнение к сочинению „Общая задача об устойчивости движения". Харьков. 1892). — Зап. Харьк. унив., 1893, № 1, стр. 99—104.

То же. [С исправлениями]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1893, т. III, № 6, стр. 265—272.

То же. Отд. оттиск. [Харьков]. 1892. 8 стр.

То же. — В кн.: Общая задача об устойчивости движения. 2-е изд. Л.—М. 1935, стр. 344—351.

Реферат: Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1894, t. II, 1 partie, p. 104.

10. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. — Матем. сб., издаваемый Моск. матем. общ., 1893, т. XVII, вып. 2, стр. 253—333.

То же. Отд. оттиск. М. 1893.

То же. — В кн.: Общая задача об устойчивости движения. 2-е изд. Л.—М. 1935, стр. 280—343.

Доложено в заседании Харьк. матем. общ. 4 декабря 1892 г.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1893—1894, Bd. XXV, SS. 1393—1395. Подписано: Jk. [Joukovsky]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1894, t. II, 1 partie, p. 109.

11. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1893, т. IV, № 1 и 2, стр. 81—85.

То же. Отд. оттиск. Харьков 1893. 7 стр.

Доложено в заседании 10 октября 1893 г.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1893—1894, Bd. XXV, S. 1501. Подписано: Jk. [Joukovsky]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1894, t. II, 1 partie, p. 125.

1894

12. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1894, т. IV, № 3, стр. 123—140.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1894. 20 стр.

Исследование положений, изложенных в § 1 мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe“ (Acta mathem. t. XII). См. также: Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. IV, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 10 мая 1893 г., стр. 285.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1893—1894, Bd. XXV, SS. 1430—1431. Подписано: Jk. [Joukovsky].

1895

13. Несколько слов относительно статьи Г. Г. Аппельрота: По поводу параграфа первого мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe“. (Прил. к проток. засед. Харьк. матем. общ. 10 мая 1893 г.). — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1895, т. IV, № 5 и 6, стр. 292—297.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 6 стр.

Краткое суждение о приеме Г. Г. Аппельрота, изложенном в указанной выше статье. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1895, т. IV, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 10 мая 1893 г., стр. 284—285.

1896

14. О рядах, предложенных Hill'ем для представления движения луны. — Тр. Отд. физ. наук Общ. любит. естествозн., М., 1896, т. VIII, вып. 1, стр. 1 bis — 23 bis.

То же. Отд. оттиск. М. 1896. 23 стр.

Доложено в заседании Харьк. матем. общ. 16 декабря 1894 г. [Под загл.: О сходимости периодических рядов Hill'а в теории луны].

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1895, Bd. XXVI, S. 1103. Подписано: Jk. [Joukovsky].

15. Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. — Сообщ. Харьковск. матем. общ., 2-я серия, 1896, т. V, № 3 и 4, 5 и 6, стр. 190—254.

То же Отд. оттиск. Харьков. 1896. 65 стр.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr der Mathem., Berlin, Jg. 1897, Bd. XXVIII, S. 289. Подписано: Wi [Wassilieff]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1897, t. V, 2 partie, p. 129.

16. Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1896, t CXXIII, pp. 1248—1252.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1896, Bd. XXXII, SS. 252—253. Подписано: Hr. [Hamburger]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1897, t. V, 2 partie, p. 56

1897

17. Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum. — Journ. de mathém. pures et appl., Paris, 5 série, 1897, t. III, pp. 81—94.

То же. Отд. оттиск. Paris. 1897. 81—94 pp.

То же. Перев. на русск. яз. под загл.: О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть maximum. — В кн.: Общая задача об устойчивости движения. 2-е изд. Л.—М. 1935, стр. 352 — 362.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1897, Bd. XXVIII, S. 630. Подписано: Lp. [E. Lampe]; 2) Rev. semestr. des publ mathém., Amsterdam, 1897, t. V, 2 partie, p. 70; 3) Beibl. zu den Ann. der Phys. und Chem., Leipzig, 1897, Bd. XXI, S. 928. Подписано: Lp. [E. Lampe].

18. Sur le potentiel de la double couche. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1897, t. CXXV, pp. 694—696.

То же. Отд. оттиск. [Paris. 1897].

То же. — L'éclairage électrique, Paris, 1897, t XIII, pp. 423—424.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1897, Bd. XXVIII, SS. 698—699. Подписано: Wn. [Wangerin]; 2) Beibl. zu den Ann. der Phys. und Chem., Leipzig, 1897, Bd. XXII, S. 202. Подписано: Lp. [E. Lampe].

19. Sur le potentiel de la double couche. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1897, т VI, № 2 и 3, стр 129—138
То же. Отд. оттиск. Kharkow. 1897. 12 p.
Доказательство теорем, опубликованных в „Comptes rendus de l'Acad. des sciences“, Paris, 1897, t. CXXV, 2 sem., № 16, pp. 694—696.
Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1897, Bd. XXVIII, S. 699. Подписано. Jk. [Joukovsky].
20. Sur certaines questions se rattachant au problème de Dirichlet. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1897, t. CXXV, pp. 803—810.
То же. Отд. оттиск. [Paris. 1897]. 3 p.
Реферат: Jahrb. über. die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1897, Bd. XXVIII, S. 363. Подписано. Hz. [Hurwitz].

1898

21. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet. — Journ. de mathém. pures et appl., Paris, 5 série, 1898, t. IV, pp. 241—311..
То же. Отд. оттиск. Paris. 1898. 241—311 pp.
Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1898, Bd. XXIX, SS. 723—724. Подписано: Hae. [Haentzschel]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1899, t. VII, 1 partie, p. 68.

1899

22. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1899, t. CXXVIII, pp. 910—913.
То же. Отд. оттиск. Paris. 1899. 4 p.
Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1899, Bd. XXX, SS. 302—303. Подписано: Hr. [Hamburger]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1900, t. VIII, 1 partie, p. 63.
23. Sur une équation transcendante et les équations différentielles inéaires du second ordre à coefficients périodiques. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, 1899, t. CXXVIII, pp. 1085—1088.
Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1899, Bd. XXX, S. 303. Подписано: Hr. [Hamburger].

1900

24. Sur une proposition de la théorie des probabilités. — Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1900, т. XIII, № 4, стр. 359—386.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1901. 359—386 стр.

Представлено А. А. Марковым 4 мая 1900 г.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1900, Bd. XXXI, S. 228. Подписано: S. [Sintzow]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1902, t. X, 2 partie, p. 152. Подписано: D. M. Sintzof.

25. Sur une série relative à la théorie d'une équation différentielle linéaire du second ordre. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1900, t. CXXXI, pp. 1185—1188.

То же. Отд. оттиск. [Paris. 1900]. 3 p.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1900, Bd. XXXI, S. 350. Подписано: Hr. [Hamburger]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1901, t. IX, 2 partie, p. 61.

1901

26. Ответ П. А. Некрасову. — Зап. Харьк. унив., 1901, № 3., стр. 51—63.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1901. 13 стр.

О статье П. А. Некрасова „По поводу одной простейшей теоремы о вероятностях сумм и средних величин". — Матем. сб., 1901, т. XXII, вып. 2, стр. 225—238.

Реферат: Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1902, t. X, 1 partie, p. 146. Подписано M.-A. Tikhomandritzky.

27. Sur un théorème du Calcul des probabilités. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1901, t. CXXXII, pp. 126—128.

То же. Отд. оттиск. [Paris]. 1901. 3 p.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1901, Bd. XXXII, SS. 230—231. Подписано: Bö [Börsch]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1901, t. IX, 2 partie, p. 63.

28. Une proposition générale du Calcul des probabilités. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1901, t. CXXXII, pp. 814—815.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1801, Bd. XXXII, SS. 230—231. Подписано: Bö. [Börsch].

29. Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. — Зап. Акад. Наук по Физ.-матем. отд., 8-я серия, 1901, т. XII, № 5, стр. 1—24.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1901. [2], 24 стр.

Доложено 25 апреля 1901 г.

Реферат: Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1903, t. XI, 1 partie, p. 153. Подписано: D. M. Sintsof.

1902

30. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. — Зап. Акад. Наук по Физ.-матем. отд., 8-я серия, 1902, т. XIII, № 2, стр. 1—70.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1902. [2], 70 стр.

Доложено 25 сентября 1902 г.

Краткое изложение содержания работы. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 25 сентября 1902 г., § 304.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1903, Bd. XXXIV, SS. 371—373. Подписано: Si [Sintzow]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1903, t. XI, 2 partie, pp. 152—153. Подписано: D. M. Sintsof.

31. Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1902, т. VII, № 4 и 5, стр. 229—252.

То же. Отд. оттиск. Kharkow. 1902. 24 p.

Доложено в заседании 1 февраля 1902 г.

Рефераты: 1) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1902, t. X, 2 partie, p. 147. Подписано: M. A. Tikhomandritzky; 2) Beibl. zu den Ann. der Phys. und Chem., Leipzig, 1902, Bd. XXVI, S. 914. Подписано: A. K. [A. Korn].

1903

32. Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes. — Зап. Акад. Наук по Физ.-матем. отд., 8-я серия, 1903, т. XIV, № 7, стр. 1—37.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1903. [2], 37 стр.

Краткое сообщение о причинах, побудивших А. М. Ляпунова предпринять исследования, часть которых составляет содержание настоящей статьи. — Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1903, т. XIX, № 3, проток. засед. Физ.-матем. отд. 8 октября 1903 г., стр. XX—XXI.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1903, Bd. XXXIV, SS. 1011—1012. Подписано: Jk. [Joukowsky]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1905, t. XIII, 1 partie, p. 149. Подписано: D. M. Sintsof.

1904

33. Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes. — Зап. Акад. Наук по Физ.-матем. отд., 8-я серия, 1904, т. XV, № 10, стр. 1—66.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1904. [2], 66 стр.

Доложено 28 января 1904 г.

Реферат: Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1905, t. XIII, 1 partie, pp. 151—152. Подписано: D. M. Sintsof.

1905

34. Sur un problème de Tchebycheff. [Об одной задаче Чебышева]. — Зап. Акад. Наук, по Физ.-матем. отд., 8-я серия, 1905, т. XVII, № 3, стр. 1—32.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1905. [2], 32 стр.

Краткое сообщение А. М. Ляпунова об истории вопроса, исследованиях Пуанкаре, теме и методе исследования. — Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1905, т. XXII, № 4 и 5, проток. засед. Физ.-матем. отд. 4 мая 1905 г., стр. XXXII—XXXIII.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1906, Bd. XXXVII, SS. 973—974. Подписано: Lp. [E. Lampe]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1906, t. XIV, 2 partie, p. 129. Подписано: D. M. Sintsof. 3) Fortschr. der Physik, Braunschweig, 1908, Bd. LXIV, Abth. 1, SS. 163—164. Подписано: Lp. [E. Lampe].

1906

35. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. Parties I—IV. St.-Pbg. Imprim. de L'Acad. des Sc. 1906—1914.

I partie. Etude générale du problème. St.-Pbg. 1906. 225, IV p.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1906, Bd. XXXVII, SS. 718—719. Подписано: Jk. [Joukowsky]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1907, t. XV, 2 partie, p. 124. Подписано: D. M. Sintsof; 3) Fortschr. der Phys., Braunschweig, 1908, Bd. LXIV, Abth. 1, SS. 165—166. Подписано: Lp. [E. Lampe].

II partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin. St.-Pbg. 1909. 203, IV p.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1909, Bd. XL, SS. 770—772. Подписано: Lp. [E. Lampe]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém, Amsterdam, 1910, t. XVIII, 2 partie, pp. 122—123. Подписано: D. M. Sintsof; 3) Fortschr. der Phys., Braunschweig, 1910, Bd. LXVI, 1 Abth., SS. 141—143. Подписано: Lp. [E. Lampe]; 4) Beibl. zu den Ann. der Phys., Leipzig, 1910, Bd. XXXIV, SS. 1184—1187. Подписано: Lp. [E. Lampe].

III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi. St.-Pbg. 1912. 228, IV p.

Изложение мемуара. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1911, т. V, № 14, Доклады о научных трудах, стр. 964—965

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1912, Bd. XLIII, H. 3, SS. 806—808. Подписано: Lp [E. Lampe]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém, Amsterdam, 1913, t. XXI, 1 partie, p. 123. Подписано. P. Somoff.

IV partie. Nouvelles formules pour la recherche des figures d'équilibre. St.-Pbg. 1914. 112, IV p.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1914—1915, Bd. XLV, H. 3, SS. 1182—1184. Подписано Lp. [E. Lampe]; 2) Rev. semestr. des publ mathém., Amsterdam, 1914, t. XXII, 2 partie, p. 113. Подписано: P. Somoff; 3) Fortschr. der Phys, Braunschweig, 1914, Bd. LXX, Abth. 1, SS 151—153. Подписано: Lp. [E. Lampe].

1908

36. Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation — Зап. Акад. Наук по физ.-матем. отд., 8-я серия, 1908, т. XXII, № 5, стр. 1—140.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1908. [4], 140 стр.

Доложено 2 октября 1907 г.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1908, Bd. XXXIX, SS. 763—764. Подписано: Lp. [E. Lampe]; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1909, t. XVII, 1 partie, pp. 104—105. Подписано. D. M. Sintsof; 3) Fortschr. der Phys., Braunschweig, 1908, Bd. LXIV, Abth. 1, SS. 166—168. Подписано: Lp. [E. Lampe]; 4) Beibl. zu den Ann. der Phys., Leipzig, 1909, Bd. XXXIII, SS 709—711 Подписано Lp. [E. Lampe].

1909

Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. II partie.

См. № 35.

37. Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation. — Ann. scientif. de l'Ec. norm. supér., Paris, 3 série, 1909, t. XXVI, pp 473—483.

То же. Отд. оттиск. Paris. 1909. 473—483 pp.

Содержание мемуара. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1910, т. IV, № 7, стр. 491—492.

Рефераты: 1) Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, Jg. 1909, Bd. XL, S. 772; 2) Rev. semestr. des publ. mathém., Amsterdam, 1910, t. XVIII, 2 partie, p. 40. Подписано: P. van Mourik; 3) Fortschr. der Phys., Braunschweig, 1910, Bd. LXVI, 1 Abth., S. 144. Подписано: Lp. [E. Lampe]; 4) Beibl. zu den Ann. der Phys., Leipzig, 1910, Bd. XXXIV, S. 1187. Подписано: Lp. [E. Lampe].

1912

Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. III partie.

См. № 35.

1914

Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. IV partie.

См. № 35.

1915

38. Sur les séries de polynômes. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1915, т. IX, № 17, стр. 1857—1868.

То же. Отд. оттиск. П. 1915. 1857—1868 стр.

Представлено 18 ноября 1915 г.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, 1921—1922, Bd. XLVIII, S. 1377. Подписано: L. M. G. (Sm.) [V. I. Smirnov].

1916

39. Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes d'un liquide homogène en rotation. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, т. X, № 3, стр. 139—168.

То же. Отд. оттиск. П. 1916. 139—168 стр.

Доложено 20 января (2 февраля) 1916 г.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, 1921—1922, Bd. XLVIII, SS. 1455—1457. Подписано: L. M. G. (Sm.) [V. I. Smirnov].

40. Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène. Part. 1—2. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, т. X, № 7, стр. 471—502; № 8, стр. 589—620.

То же. Отд. оттиск. П. 1916. 471—502, 589—620 стр.

Доложено 2 (15) марта и 30 марта (12 апреля) 1916 г.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, 1921—1922, Bd. XLVIII, SS. 1450—1455. Подписано: L. M. G. (Sm.) [V. I. Smirnov].

1917

41. Sur une formule d'analyse.— Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1917, т. XI, № 2, стр. 87—118.

То же. Отд. оттиск. П. 1917. 87—118 стр.

Представлено 3 (16) декабря 1916 г.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin, 1921—1922, Bd. XLVIII, SS. 1457—1458. Подписано: L. M. G. (Sm.) [V. I. Smirnov].

1927

42. Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. L. 1925—1927. Partie 1-re. 1925. [2], 224 p. Partie 2-me. 1927. [2], 225—437, [3] p.

Издано в ознаменование 200-летия Академии Наук СССР; предисловия: W. Stekloff. Les recherches posthumes de Liapunoff sur les figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. XI p.; W. Smirnoff. Avant-propos.

[Предисловия, изданные в виде отдельного оттиска]. L. 1927. [2], XIII p.

Реферат: Jahrb. über die Fortschr. der Mathem., Berlin — Leipzig, 1927, Bd. LIII, SS. 776—778. Подписано: L. M. G. (Sm.) [V. I. Smirnov].

1930

43. О форме небесных тел. — Изв. Акад. Наук по физ.-матем. отд., 1930, № 1, стр. 25—41.

Вступительная лекция курса, читанного в Новороссийском университете; доложено акад. А. Н. Крыловым в заседании Отд. физ.-матем. наук 29 октября 1929 г.

2. Курсы лекций

* 44. Лекции аналитической механики. Харьков. 1885. 155 стр. [Литографированное издание].

* 45. Динамика материальной точки. 1886. 156 стр. [Литографированное издание]. [Без титульного листа].

* 46. Статика. [1887] 75 стр. [Без титульного листа и обложки. Описано по 1-й странице текста].

* То же 124 стр. [Упоминается в статье А. Н. Крылова „Александр Михайлович Ляпунов". Некролог]

См. № 85.

* 47. Курс теоретической механики. Харьков 1890. 344 стр. [Технологический институт. Литографированное издание].

* То же. Харьков 1893. 468 стр.

48. Теория притяжения. Лекции, прочитанные для студентов Харьковского университета Харьков. 1897. 131 стр. [Литографированное издание].

* То же. 75 стр. [Упоминается в статье А. Н. Крылова „Александр Михайлович Ляпунов". Некролог].

См. № 85.

49. [Лекции, читанные проф. А. М. Ляпуновым. 1—5. Харьков. 1900. Литографированное издание].

[1] Кинематика. 127 стр. — [2] Динамика материальной точки. 328 стр. — [3] Динамика системы точек. 469 стр. — [4] Теория притяжения. 56 стр. — [5] Основания теории деформируемых тел и гидростатика. 140 стр.

* 50. Динамика системы точек Лекции. Харьков. 1900. 526 стр. [Литографированное издание].

* 51. Динамика системы материальных точек. 415 стр. [Упоминается в статье А. Н. Крылова „Александр Михайлович Ляпунов. Некролог"].

См. № 85.

* 52. Динамика неизменяемой системы точек. 104 стр. [Литографированное издание].

* 53. Кинематика (Введение). 8 стр. [Литографированное издание. Без титульного листа].

* 54. Механика системы точек. 191 стр. [Литографированное издание. Без титульного листа].

* 55. Основания теории деформируемых тел и гидростатика. 128 стр., с табл. [Литографированное издание. Без титульного листа].

3. Рецензии, переводы, некрологи и др.

56. Отзыв о сочинении прив.-доц. Стеклова „О движении твердого тела в жидкости", представленном в Физико-математический факультет в качестве диссертации на степень магистра прикладной математики — Зап. Харьк. унив., 1894, № 4, стр. 94—100.

57. Пафнутий Львович Чебышев. [Некролог]. — Сообщ Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1895, т. IV, № 5 и 6, стр. 263—273.

То же. Отд. оттиск Харьков. 1895. 18 стр.

То же. В кн: П Л. Чебышев. Избранные математические труды. М.-Л. 1946, стр. 9—21. (Классики естествознания).

Сообщено в заседании 7 апреля 1895 г.

Список сочинений П. Л. Чебышева (стр. 274—280).

58. Перевод работы П. Л. Чебышева „Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}dx$" на русский яз. под загл.: Об интегрировании дифференциала $\frac{x+A}{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}dx$. — В кн.. Чебышев, П. Л. Сочинения, т. I. Спб. 1899, стр. 517—530.

59. Перевод работы П. Л. Чебышева „Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt" на русский яз. под загл.: О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта. — В кн: Чебышев, П. Л. Сочинения, т. I. СПб. 1899, стр. 533—538.

60. Перевод работы П. Л. Чебышева „Sur l'intégration des différentielles irrationnelles" на русский яз. под загл.: Об интегрировании иррациональных дифференциалов. — В кн.: Чебышев, П. Л. Сочинения, т. I СПб. 1899, стр. 511—514.

61. [О заслугах М. В. Остроградского в области механики. Речь, произнесенная 12 сентября 1901 г. на торжественном публичном собрании памяти М. В. Остроградского]. — В кн.: Михаил Васильевич Остроградский. Празднование столетия дня его рождения Полтавским кружком любителей физико-математических наук. Сост. П. Трипольский Полтава. 1902, стр. 115—118.

62. Записка по поводу труда Б. Б. Голицына „Ueber seismometrische Beobachtungen". — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук, III прил. к проток. засед. 5 марта 1903 г.

То же. — В кн.: Прения между академиками Ф. А. Бредихиным, О. А. Баклундом, Б. Б. Голицыным, А. М. Ляпуновым и А. А. Марковым, происходившие в заседаниях 1-го отделения Академии Наук в начале 1903 г. СПб. 1903, стр. 22—28.

63. Замечания на возражение Б. Б. Голицына, помещенное в приложении к протоколу заседания 19 марта 1903 г. — Проток. засед. физ.-матем. отд. Акад. Наук, III прил. к проток. засед. 16 апреля 1903 г.

То же. — В кн. Прения между академиками Ф. А. Бредихиным, О. А. Баклундом, Б. Б. Голицыным, А. М. Ляпуновым и А. А Марко-

вым, происходившие в заседаниях 1-го отделения Академии Наук в начале 1903 г. СПб. 1903, стр. 48—50.

64. Отзыв о сочинении проф. В. А. Стеклова „Общие методы решения основных задач математической физики“. — Зап. Харьк. унив., 1903, № 1, стр. 25—34.

65. [Отзыв А. М. Ляпунова о работе А. Н. Крылова „Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 14 января 1904 г., § 18; см. также: Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1904, т. XX, № 1 и 2, стр. VIII—IX.

66. Записка об ученых заслугах А. А. Белопольского. [Совместно с О. Баклундом, Н. Сониным]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук, прил. к проток. засед. 11 января 1906 г.

67. Перевод работы П. Л. Чебышева „Sur les valeurs limites des intégrales“ на русский яз. под загл.: „О предельных величинах интегралов. — В кн.: Чебышев, П. Л. Сочинения, т. II. СПб. 1907, стр. 183—185

68. Перевод работы П. Л. Чебышева „О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвертой степени“ на французский яз. под загл.: „Sur les plus simples parallélogrammes qui fournissent un mouvement rectiligne aux termes du quatrième ordre près“. — В кн.: Tchébychef, P. L. Oeuvres, т. II. St.-Psb. 1907, pp. 359—374.

69. Четвертый Международный математический конгресс. Отчет. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1908, т. II, № 9, стр. 709—710.

Доложено 25 апреля 1908 г.

70. [Доклад о научных заслугах Вито Вольтерра. Совместно с Н. Сониным]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1909, № 4, III прил. к проток. засед. Физ.-матем. отд. 10 декабря 1908 г., стр. 213—215.

71. Записка об ученых трудах ординарного профессора С.-Петербургского университета Владимира Андреевича Стеклова. [Совместно с А. А. Марковым и Н. Сониным]. — Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук, прил. 1-е к проток. 2 октября 1910 г.; см. также: Прилож. 5-е к проток. засед. Физ.-матем. отд. 15 сентября 1910 г.

72. Записка об ученых трудах адъюнкта В. А. Стеклова. [Совместно с Н. Сониным и О. Баклундом]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук, прил. к проток. 7 декабря 1911 г.

73. Доклад Комиссии по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе. [Совместно с А. А. Марковым, В. А. Стекловым, Н. Я. Цингером, Д. К. Бобылевым и А. Н. Крыловым]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук, 1-е прил. к проток. засед. 18 ноября 1915 г., стр. 250—267.

То же. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, № 2, стр. 66—80.

74. Дмитрий Константинович Бобылев. Некролог. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1917, т. XI, № 5, стр. 301—306.

То же. Отд. оттиск. П. 1917. 301—306 стр.

Доложено 1 марта 1917 г. Прил.: Список трудов Д. К. Бобылева (стр. 305—306).

75. Гастон Дарбу. (1842—1917). Некролог. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1917, т. XI, № 6, стр. 351—352.

Доложено 15 февраля 1917 г.

76. Теория вероятностей. Лекции акад. П. Л. Чебышева, читанные в 1879—1880 гг. По записи А. М. Ляпунова. Изданы акад. А. Н. Крыловым. М.-Л. 1936. [3], 253 стр.

II. Материалы о жизни и деятельности А. М. Ляпунова

1. Очерки жизни и деятельности

77. Бобылев, Д. А. М. Ляпунов. — В кн.: Биографический словарь профессоров и преподавателей С.-Петербургского университета за истекшую третью четверть века его существования. 1869—1894, т. I. СПб. 1896, стр. 415. Библиогр. (7 назв.).

78. Ляпунов, А. М. — В кн.: Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона, т. XVIII. СПб.. 1896, стр. 276.

79. Liapunoff, A. M. — В кн.: Poggendorff, J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch, Bd. III. 1898. 1 Abth., S. 823 (2 назв.); Bd. V. 1926, S. 741 (22 назв.); Bd. VI. 1938, S. 1522. (1 назв.).

80. Записка об ученых трудах ординарного профессора Харьковского университета Александра Михайловича Ляпунова [и список его трудов]. Подписали: О. Баклунд, Ф. Бредихин, Н. Сонин, А Марков, А. Белопольский. — Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук, II прил. к проток засед. 1 сентября 1901 г.

81. Тихомандрицкий, М. А. Опыт истории Физико-математического факультета Харьковского университета за первые 100 лет его существования. — Зап. Харьк. унив., 1904, № 4, стр. 1—80.

О А. М. Ляпунове: стр. 48—49.

82. Физико-математический факультет Харьковского университета за первые сто лет его существования (1805—1905). Харьков. 1908. 357, 248, XIV стр.

Автобиография, составленная А. М. Ляпуновым (стр. 51—52).

О А. М. Ляпунове: стр. 26, 39, 41, 46—47, 204—206, 217—219, 221, 223—225.

83. Материалы для биографического словаря действительных членов Академии Наук. Ч. I. *А.* — *Л.* П. 1915.

Автобиография, составленная А. М. Ляпуновым (стр. 430—433). Список трудов (41 назв.).

84. Ляпунов, А. М. — В кн. Новый энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона, т XXV. П 1915, стлб. 274—275. Библиогр. (8 назв.).

85. Крылов, А Н Александр Михайлович Ляпунов. 1857—1919. Некролог. (Речь, произнесенная А. Н. Крыловым в публичном заседании Российской Академии наук 3 мая 1919 г.). — Изв. Росс. Акад. Наук, 6-я серия, 1919, т. XIII, № 1—11, стр. 389—394.

То же. — Матем и астрон. сб, новая серия, 1919, П., 1922, стр. 389—394

То же. — Отд. оттиск. П 1919, стр. 389—394.

То же — В кн.: Крылов, А. Н. Мои воспоминания. 1945, стр. 461—468.

В тексте приведен обзор литографированных курсов лекций, прочитанных А. М. Ляпуновым в Харьковском университете.

86. Стеклов, В. А. Александр Михайлович Ляпунов. 1857—1919. Некролог. (Речь, произнесенная в публичном заседании Российской Академии Наук 3 мая 1919 г.). — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1919, т. XIII, № 1—11, стр. 367—388, 1 л. портр.

То же. — Матем. и астроном. сб, новая серия, 1919, П., 1922, стр. 376—388.

То же. — В кн.: Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения. 2-е изд. Л. — М 1935, стр. 364—382.

87. Записка о библиотеке А. М. Ляпунова, Подписали В. А. Стеклов, А. А. Марков, А. А. Белопольский, А. Н. Крылов. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 19 февраля 1919 г., стр. 53—54, § 97.

* 88. Смирнов, В. И. и Крылов. Н М. Памяти двух великих русских ученых второй половины XIX столетия П Л. Чебышева и А. М. Ляпунова. — В кн.: Зап. матем. каб Крымск. (б. Таврическ.) унив. им. тов. М. В. Фрунзе. Прил к „Известиям“ Университета, т. III. Симферополь. 1921, стр. XXII—LIV.

89. Бузескул, В. П. Александр Михайлович Ляпунов и Харьковский университет 80-х годов. (Страничка из личных воспоминаний). — Уч. зап. высш. шк. г Одессы, Отд. гуманит.-обществ. наук, 1922, т. II, стр. 117—120

Речь, произнесенная в заседании Харьковского математического общества, посвященном памяти академика А. М. Ляпунова.

90. Liapunov, A. M. — В кн. The Encyclopaedia britannica, v XIII. 14 ed. London — New York. 1929, p. 995.

91. Ляпунов, Б. М. Краткий очерк жизни и деятельности А. М. Ляпунова. — Изв. Акад. Наук, Отд. Физ.-матем., 1930, № 1, стр. 1—24. Библиогр. в подстрочных примечаниях.

То же. Отд оттиск. Л. 1930. 24 стр., 1 л. портр.

92. Салтыков, Н. Н. Русское математическое творчество. В кн.: Comptes rendus du I Congrès des mathématiciens des pays slaves. Warszawa. 1930, pp. 81—91.

О А. М. Ляпунове: стр. 88—91.

93. Степанов, В. В. А. М. Ляпунов. — В кн.: Большая Советская Энциклопедия, т. XXXVII. М. 1938, стлб. 592—593. Библиогр. (7 назв.).

94. Моисеев, Н. Д. А. М. Ляпунов и его труды по теории устойчивости. — Уч. зап. Моск. Гос. унив. им. В. М. Ломоносова, 1947, вып. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры, т. I, кн. 1, стр. 129—147.

2. Краткие заметки

а. Сведения биографического характера

95. [Об оставлении А. М. Ляпунова при университете для приготовления к экзамену на степень магистра]. — В кн.: Проток. засед. Совета С.-Петерб. унив. за первую половину 1880—1881, СПб., 1881, № 23, Отчет о состоянии Университета за 1880 г., стр. 82.

96. [Об оставлении А. М. Ляпунова при Университете]. — В кн.: Проток. засед. Совета С.-Петерб. унив. за первую половину 1883—1884 г., СПб., 1884, № 29, Журн. засед. Совета 31 октября 1883 г., стр. 37.

97. [Об определении А. М. Ляпунова на должность консерватора при кабинете практической механики]. — В кн.: Проток. засед. Совета С.-Петерб. унив. за вторую половину 1883—1884 г., СПб., 1885, № 30, Журн. засед. Совета 16 января 1884 г., стр. 8.

98. [О защите А. М. Ляпуновым диссертации и присуждении ему степени магистра прикладной механики]. — В кн.: Проток. засед. Совета С.-Петерб. унив. за вторую половину 1884—1885 г., № 32, СПб., 1885, Журн. засед. Совета 28 января 1885 г., стр. 9.

99. [О допущении магистра прикладной математики А. М. Ляпунова к чтению лекций в качестве приват-доцента с 1885—1886 г.]. — В кн.: Проток. засед. Совета С.-Петерб. унив. за вторую половину 1884—1885 г., № 32, СПб., 1885, Журн. засед. Совета 30 мая 1885 г., стр. 41.

100. [Об утверждении А. М. Ляпунова в степени доктора прикладной математики]. — В кн.: Отчет о состоянии и действиях Московского университета. М. 1894, стр. 61.

101. [О представлении и избрании профессора Харьковского университета А. М. Ляпунова членом-корреспондентом Академии Наук по разряду математических наук]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 1 ноября 1900 г., § 320; 15 ноября 1900 г., § 346.

102. [Об избрании профессора Харьковского университета А. М. Ляпунова ординарным академиком по прикладной математике]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 25 апреля 1901 г., § 226; см. также: Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук 6 октября 1901 г., § 145.

103. [О ходатайстве ректора Харьковского университета об оставлении А. М. Ляпунова профессором Харьковского университета до 1 апреля 1902 г.]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 28 ноября 1901 г., § 435.

104. [Об избрании А. М. Ляпунова иностранным членом Римской Академии Наук]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 4 февраля 1909 г., § 91.

105. [Об избрании А. М. Ляпунова почетным членом Харьковского университета]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 26 октября 1911 г., § 501.

106. [Об избрании А. М. Ляпунова почетным членом Казанского университета]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, № 13, извл. из проток. засед. Отд. физ.-матем. наук 11 мая 1916 г., стр. 1159.

107. [Об избрании А. М. Ляпунова почетным членом Русского астрономического общества]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, № 16, извл. из проток. засед. Отд. физ.-матем. наук 28 сентября 1916 г., стр. 1449.

108. [Об избрании А. М. Ляпунова 20 мая 1917 г. почетным членом Новороссийского университета]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 5 июня (23 мая) 1918 г., стр. 127, § 254; Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1918, № 14, стр. 1434.

109. [О кончине в Одессе А. М. Ляпунова]. — Проток. заседания Общ. собр. Акад. Наук 8 марта 1919 г., стр. 60, § 60; см. также: Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1919, № 12, стр. 497—498; см. также: Отчет о деятельности Российской Академии Наук по отделению физико-математических и исторических наук и филологии за 1919 г. П. 1920, стр. 1—4.

б. Выступления в Харьковском математическом обществе

110. [Об изложении А. М. Ляпуновым содержания статьи проф. Жуковского „О движении вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями“]. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив., [1-я серия], 1887, кн. 1, проток. засед. 30 апреля 1887 г., стр. 58.

111. [Об изложении А. М. Ляпуновым статьи И. В. Мещерского „О дифференциальных связях в случае одной материальной точки“]. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив., [1-я серия], 1887, кн. 2, проток. засед. 16 октября 1887 г., стр. 64.

112. [О решении А. М. Ляпуновым задач А. А. Маркова на определение функций и кривых линий по некоторым условиям]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1889, т. I, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 15 декабря, стр. 283.

113. [Об изложении А. М. Ляпуновым начал работы „О характеристическом уравнении, соответствующем данной системе дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1891, т. II, № 6, извл. из проток. засед. 5 февраля и 9 марта 1889 г., стр. 303.

114. [О сообщении А. М. Ляпунова „О некоторых системах линейных дифференциальных уравнений"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1891, т. II, № 6, извл. из проток. засед. 23 ноября 1890 г.

115. [О сообщении А. М. Ляпунова „Общая задача теории устойчивости движения"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1893, т. III, № 6, извл. из проток. засед. от 15 марта 1891 г., стр. 296.

116. [О сообщении А. М. Ляпуновым нового доказательства теоремы Фукса, относящейся к линейным дифференциальным уравнениям]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1893, т. III, № 6, извл. из проток. засед. 13 декабря 1891 г., стр. 298.

117. [О сообщении А. М. Ляпунова „Об инвариантах одного линейного уравнения с периодическими коэффициентами"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1897, т. V, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 5 мая 1895 г., стр. 288.

118. [О сообщении А. М. Ляпунова „О некоторых неравенствах"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1897, т. V, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 13 декабря 1896 г., стр. 293.

119. [О сообщении А. М. Ляпунова „О наибольших величинах некоторых интегралов"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1897, т. V, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 18 октября 1896 г., стр. 292.

120. [О сообщении А. М. Ляпунова „О некоторых формулах, относящихся к теории сферических функций"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1899, т. VI, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 2 мая 1897 г., стр. 295.

121. [О сообщении А. М. Ляпунова „О методе Неймана для решения одной задачи, относящейся к уравнению Лапласа"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, 1899, т. VI, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 12 декабря 1899 г., стр. 297.

122. [О сообщении А. М. Ляпунова „О потенциале двойного слоя и о методе К. Неймана"]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 1899, т. VI, № 5 и 6, извл. из проток. засед. 3 октября 1897 г., стр. 296.

в. Деятельность в Академии Наук[1]

123. [Представление акад. А. А. Марковым статьи профессора Харьковского университета А. М. Ляпунова „Sur une proposition de la théorie des probabilités“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 3 мая 1900 г., § 171; 4 октября 1900 г., § 275; Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1900, т. XII, № 5, стр. XXX; т. XIII, стр. LXIV.

См. № 24.

124. [Представление акад. А. А. Марковым статьи А. М. Ляпунова „Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 25 апреля 1901 г., § 201; Изв. Акад. Наук, 5-я серия, т. XIV, № 5, стр. XLI.

См. № 29.

125. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по присуждению премии им. Д. А. Толстого]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 8 мая 1902 г., § 203; 6 ноября 1902 г., § 364 и 4 мая 1905 г., § 223.

126. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по присуждению премий им. В. Я. Буняковского]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 8 мая 1902 г., § 204, 6 ноября 1902 г., § 363; 4 мая 1905 г., § 221; 4 мая 1911 г., § 301 и 21 мая 1914 г., § 525.

127. [Представление А. М. Ляпуновым работы „Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 25 сентября 1902 г., § 304.

См. № 30.

128. Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по изданию собрания сочинений Эйлера]. — Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук 5 октября 1902 г., § 176; 10 апреля 1904 г., § 85; Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1909, т. III, № 12—18, стр. 798—800.

129. [Представление А. М. Ляпуновым статьи „Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 8 октября 1903 г., § 298; см. также: Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1903, т. XIX, № 3, стр. XX—XXI.

См. № 32.

130. [Заключение А. М. Ляпунова о работе Ф. Климентова „Новости геометрии“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 19 ноября 1903 г., § 355.

131. [О назначении А. М. Ляпунова членом Комиссии по присуждению премии председателя артиллерийского комитета Дядина]. — Проток.

[1] Указанные в этом разделе заключения А. М. Ляпунова о работах отдельных лиц представляют собой небольшие заметки о рассмотренных им работах с краткой их оценкой.

засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 19 ноября 1903 г., § 349 и 17 сентября 1908 г., § 360.

132. [Представление А. М. Ляпуновым работы „Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes"]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 28 января 1904 г., § 59; см. также: Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1904, т. XX, № 2, стр. IX.

См. № 33.

133. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по присуждению премии имени П. Н. Юшенова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 7 апреля 1904 г., § 157; 23 февраля 1905 г., § 97; 15 апреля 1909 г., § 220 и 30 апреля 1914 г., § 441.

134. [Заключение А. М. Ляпунова о математических работах Попова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 19 мая 1904 г., § 220.

135. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по присуждению премии митрополита Макария]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 22 сентября 1904 г., § 309.

136. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по присуждению премии С. А. Иванова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 3 ноября 1904 г., § 364 и 17 ноября 1904 г., § 392.

Присуждение премии им. С. А. Иванова П. Н. Лебедеву. (Проток. засед. 17 ноября 1904 г.).

137. [Представление А. М. Ляпуновым работы „Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation", отпечатанной в „Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse". 1904.] — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 19 января 1905 г., § 20; см. также: Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1905, т. XXII, № 1, стр. IV.

См. № 3.

138. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по присуждению премии Ф. Ф. Шуберта]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 19 января 1905 г., § 33; 13 сентября 1906 г., § 295 и 5 сентября 1912 г., § 446; см. также: Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1905, т. XXII, № 2, стр. 5—7.

139. [Об участии А. М. Ляпунова в заявлении А. А. Маркова по вопросу о положении печати]. — Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук 24 марта 1905 г., § 104.

140. [Представление А. М. Ляпуновым статьи „Sur un problème de Tchébychef]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 4 мая 1905 г., § 199; см. также: Изв. Акад. Наук, 5-я серия, 1905, т. XXII, № 4 и 5, стр. XXXII — XXXIII.

См. № 34.

141. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по вопросу о реформе календаря в России]. — Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук 8 октября 1905 г., § 206.

142. [Заключение А. М. Ляпунова о работе Жукова „Теоретическое основание и опыты искусственного технического творчества“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 12 октября 1905 г., § 321.

143. [Об исследованиях А. М. Ляпунова в гидростатической теории фигуры небесных тел]. — В кн.: Отчет о деятельности Академии Наук по Физ.-математич. и Ист.-филологич. отд. за 1905 г. СПб. 1905, стр. 22.

144. [Представление А. М. Ляпуновым работы „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 8 марта 1906 г., § 119; см. также: Изв. Акад. Наук, 1906, 5-я серия, т. XXIV, № 3, стр. XIX.
См. № 35.

145. [Заключение А. М. Ляпунова об изобретенной Шабловским машине, действующей сжатым воздухом]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 14 марта 1907 г., § 130

146. [Об избрании А. М. Ляпунова в члены Пулковского комитета]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1907, т. I, № 1—11, извл. из проток. засед. Физ.-матем. отд. 11 апреля 1907 г., стр. 270; см. также: Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 25 апреля 1908 г., § 257; 29 апреля 1909 г., § 263; 31 марта 1910 г., § 213 и 19 марта 1914 г., § 283.

147. [Представление А. М. Ляпуновым работы „Problème de minimum dans la question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 19 сентября 1907 г., § 364; см. также: Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1907, т. I, № 15, стр. 617.
См. № 36.

148. [Заключение А. М. Ляпунова о работах Ф. Б. Бастамова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 24 октября 1907 г., § 449.

149. [О командировании А. М. Ляпунова в Рим для участия в IV Международном математическом конгрессе]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 9 января 1908 г., § 11.

150. [О внесении А. М. Ляпуновым совместно с академиками Ф. Б. Шмидтом, А. С. Фаминцыным, О. А. Баклундом, А. П. Карпинским, Н. Н. Бекетовым, Н. Я. Сониным, Б. Б. Голицыным, Ф. Н. Чернышевым, В. В. Зеленским, И. П. Бородиным и Н. В. Насоновым предложения о дальнейшей судьбе Физической обсерватории и отношении к ней Академии Наук]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 25 апреля 1908 г., § 243.

151. [Представление А. М. Ляпуновым экземпляра перевода на французский язык труда „Общая задача об устойчивости движения“, напечатанного в 1892 г. Харьковским математическим обществом]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 25 апреля 1908 г., § 246.

См. № 8.

152. [Представление А. М. Ляпуновым работы: „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 17 сентября 1908 г., § 387; см. также: Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1908, т. II, № 15, стр. 1158.

См. № 35.

153. [Представление А. М. Ляпуновым экземпляра мемуара „Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation“, напечатанного в „Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, Paris, 3-e série, 1909, t. XXVI, и доклада об этом мемуаре]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 17 марта 1910 г., § 161; см. также: Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1910, т. IV, стр. 593.

См. № 37.

154. [Заключение А. М. Ляпунова о записке Минюшского по вопросу о движении бумеранга и о записке А. Н. Глобуса о приборе для производства автоматических подсчетов.] — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 15 сентября 1910 г., §§ 418 и 419.

155. [Заключение А. М. Ляпунова о работе А. Н. Панова „Всемирное тяготение, рассматриваемое как функция времени“]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 4 мая 1911 г., § 257.

156. [Представление А. М. Ляпуновым работы „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi. (Recherches relatives à la vitesse angulaire et au moment des quantités de mouvement)]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 21 сентября 1911 г., § 392; см. также: Изв. Акад. Наук, 6 серия, 1911, т. V, № 17, стр. 1173.

См. № 35.

157. [О редактировании А. М. Ляпуновым одного тома собрания сочинений Эйлера]. — В кн.: Отчет о деятельности Академии Наук по Физ.-матем. и Ист.-фил. отд. за 1912 г. СПб. 1912, стр. 23.

158. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по вопросу об ознаменовании Академией 200-летнего юбилея закона больших чисел]. — Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук 12 января 1913 г., § 13.

159. [Об избрании А. М. Ляпунова в Комитет Николаевской Главной физической и Главной астрономической обсерватории]. — Проток. засед.

Физ.-матем. отд. Акад. Наук 20 марта 1913 г., § 297; 18 марта 1915 г., стр. 91, § 210 и 15 февраля 1917 г., стр. 72, § 135 и § 136; см. также: Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1917, № 9, стр. 607.

160. [Представление А. М. Ляпуновым работы „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherche des figures d'équilibre"]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 3 апреля 1913 г., § 322; см. также: Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1913 г., т. VII, № 11, стр. 594—595.

См. № 35.

161. [Заключение А. М. Ляпунова о работе И. М. Рабиновича „Новая теория кинематики"]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 13 ноября 1913 г., § 704.

162. [Об участии А. М. Ляпунова в работе Комиссии по присуждению премии С. А. Иванова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 5 марта 1914 г., стр. 83—84, § 240; 29 октября 1914 г., стр. 270—271, § 665.

163. [Заключение А. М. Ляпунова (совместно с В. А. Стекловым) о сочинениях Н. А. Булгакова, представленных на соискание премии по физике имени профессора С. А. Иванова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 29 октября 1914 г., стр. 270—271, § 665.

164. [Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по присуждению премий М. Н. Ахматова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 7 января 1915 г., стр. 12, § 27.

165. [Мнение А. М. Ляпунова о мерах к уничтожению возможных эпидемий по случаю военных действий]. — Проток. засед. Общ. собр. Акад. Наук 7 марта 1915 г., стр. 33, § 56.

166. [Об участии А. М. Ляпунова в работе Комиссии по обсуждению вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 14 октября 1915 г., стр. 197—198, § 494.

167. [Представление А. М. Ляпуновым статьи „Sur les séries des polynômes („О рядах полиномов")]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Акад. Наук 18 ноября 1915 г., стр. 242, § 568; см. также: Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, № 2, стр. 62.

См. № 38.

168. [Об участии А. М. Ляпунова в работе Комиссии по присуждению А. Ф. Иоффе премии имени С. А. Иванова]. — В кн.: Отчет о деятельности Академии Наук по Физ.-матем. и Ист.-фил. отд. за 1915 год. 1915, стр. 321.

169. [Представление А. М. Ляпуновым статьи „Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides

d'un liquide homogène en rotation"]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, № 5, извл. из проток. засед. Физ.-матем. отд. 20 января 1916 г., стр. 273.

См. № 39.

170. [Представление А. М. Ляпуновым статьи „Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivéés des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène. 1-re partie"]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, № 8, извл. из проток. Отд. физ.-матем. наук 2 марта 1916 г., стр. 560.

См. № 40.

171. [Представление статьи „Nouvelles considérations relatives á la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène. II partie"]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1916, № 10, извл. из проток. засед. Физ.-матем. отд. 30 марта 1916 г., стр. 792.

См. №. 40.

172. [Представление А. М. Ляпуновым статьи „Sur une formule d'analyse"]. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1917, т. XI, № 2, извл. из проток. засед. Физ.-матем. отд. 3 декабря 1916 г., стр. 68.

См. № 41.

173. [Об учреждении при Академии Наук Математического кабинета имени П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова]. — Проток. засед. Физ.-матем. отд. Академии Наук 8 марта 1919 г., стр. 66—67, § 78.

III. Основная научная литература, относящаяся к работам А. М. Ляпунова

1885

174. Poincaré, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. — Acta mathem., 1885, t. VII, pp. 259—380.

1886

175. Poincaré, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1886, t. CII, pp. 970—972.

1887

176. Poincaré, H. Sur un théorème de A. Liapounoff relatif à l'équilibre d'une masse fluide. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1887, t. CIV, pp. 622—625.

1891—1892

177. Жуковский, Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + \quad = 0$. — Матем. сб., изд. Матем. общ., М., 1891—1892, т. XVI, стр. 582—592.

1893

178. Стеклов, В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков. 1893. XVI, 234 стр. (Прил. к Зап. Харьк. унив. за 1893 г. Отд. оттиск).

179. Чаплыгин, С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. 1—2. — Тр. Отд. физ. наук Общ. любит. естествозн., М., 1893, т. VI, вып. 1, стр. 20—42; см. также: Матем. сб., 1897, т. XX, вып. 1, стр. 115—170; вып. 2, стр. 173—246.

То же. — Чаплыгин, С. А. Полное собрание сочинений, т. 1. Л. 1933, стр. 1—42, 43—132. с рис.

1896

180. [Стеклов, В. А.] Stekloff, W. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1896, t. CXXIII, pp. 1252—1255.

1897

181. Levi-Civita, T. Sulla stabilità dell'equilibrio per i sistemi a legami completi — Atti del Reale institute Veneto di scienze, lettere ed arti, Venezia, 1897, 7 série, t. VIII, pp. 1247—1250.

1899

182. Колосов, Г. В. О некоторых частных решениях задачи о движении твердого тела в несжимаемой идеальной жидкости. — Сб. Инст. инж. пут. сообщ., СПб., 1899, т. L, стр. 89—106.

1900

183. Боль, П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике. Юрьев. 1900. 113 стр.

То же. Перев. на франц. яз. под загл.: Sur certaines équations différentielles d'un type général utilisable en mécanique. — Bull. de la Soc. mathém. de France, Paris, 1910, t. XXXVIII, pp. 5—138.

184. Kötter, F. Die von Steklow und Liapunow entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. — Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1900, Halbband 1, SS. 79—87.

1901

185. Bendixson, I. Sur les courbes définies par les équations différentielles. — Acta mathem., 1901, t. XXIV, pp. 1—88.

То же. [Перевод первой главы]. — Усп. матем. наук, 1941, вып. 9, стр. 190—211.

186. Levi-Civita, T. Sopra alcuni criteri di instabilità. — Ann. di matem. pura ed appl., Bologna, serie 3a, 1901, t. V, pp. 221—301.

1902

187. [Стеклов, В. А.] Stekloff, W. Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. — Ann. de la faculté des sciences de l'Univ. de Toulouse, 2 serie, 1902, t. IV, pp. 171—219.

188. Darwin, G. H. On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. — Philos. trans. of the Royal Society of London, series A, 1902, v. CXCVIII, pp. 301—335.

То же. В кн.: Darwin, G. H. Scientific papers, v. III. Cambridge. 1910, pp. 288—316.

189. Poincaré, H. Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris. 1902. 210 pp., avec fig.

1906

190. Darwin, G. H. On the figure and stability of a liquid satellite. — Philos. trans. of the Royal Society of London, series A, 1906, v. CCVI, pp. 161—248.

То же. В кн.: Darwin, G. H. Scientific papers, v. III. Cambridge. 1910, pp. 436—524.

1908

191. Марков, А. А. О некоторых случаях теоремы о пределе вероятности. — Изв. Акад. Наук, 6-я серия, 1908, № 6, стр. 483—496.

Доложено в засед. Физ.-математич. отд. 5 марта 1908 г.

192. Crudeli, U. Sulla figure di equilibrio, derivate dalle ellissoidiche, di un corpo fluido, omogeneo ed incompressibile, dotato di moto rotatorio uniforme. — Nuovo cimento, Pisa, 1908, t. XVI, pp. 271—297.

193. Darwin, G. H. Further consideration of stability of the pear-shaped figure of a rotating mass of liquid. — Philos. trans. of the Royal Society of London, series A, 1908, v. CCVII, pp. 1—19.

То же. Сокращенное изложение. — Proc. of the Royal Society, series A, 1908, v. LXXX, pp. 166—167.

1910—1911

194. Beneš, L. Ueber das Vorzeichen des Poincare'schen Ausdruckes für die Stabilität der birnenförmigen Figur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse. — Astron. Nachr., Kiel, 1910—1911, Bd. CLXXXVI, SS. 305—318.

195. Cotton, E. Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1910, t. CL, pp. 511—515.

196. Cotton, E. Sur l'instabilité de l'équilibre. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1911, v. CLIII, pp. 1059—1062.

197. Cotton, E. Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles. — Ann. scientif. de l'Ec. norm. supér., Paris, 3 série, 1911, t. XXVIII, pp. 473—521.

1912

198. Dulac, H. Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. — Bull. de la Soc. mathém. de France, 1912, t. XL, pp. 324—383.

1913

199. [Марков, А. А.] Markoff, A. Démonstration du second théorème limite du calcul des probabilités par la méthode des moments. (Supplément á la 3-e édition russe du „Calcul des probabilités"). St.-Pbg. 1913. 66 p. Bibliogr. (8 n.).

200. Perron, O. Ueber lineare Differentialgleichungen bei denen die unabhängig Variable reel ist. — Journ. für die reine und angewandte Mathem., 1913, Bd. CXLII, H. 4, SS. 254—270; 1913, Bd. CXLIII, H. 1, SS. 25—50.

1914

201. Jeans. Y. H. On the potential of ellipsoïdal bodies, and the figures of equilibrium of rotating liquid masses. — Philos. trans. of the Royal Society of London, series A, 1914, v. CCXV, pp. 28—78.

1915

202. Humbert, P. Sur les bifurcations des ellipsoïdes de Jacobi. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1915, t. CLXI, pp. 340—342.

203. Humbert, P. Sur une figure d'équilibre des fluides. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1915, t. CLX, pp. 594—596.

204. Humbert, P. Sur la figure piriforme d'équilibre d'une masse fluide. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1915, t. CLX, pp. 509—510.

1916

205. Humbert, P. Simplification d'une formule de A. Liapounoff. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1916, t. CLXII, pp. 41—43.

1918

206. Jeans, J. H. On the instability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. — Philos. trans. of the Royal society of London, series A, 1918, v. CCXVII, pp. 1—34.

207. Lichtenstein, L. Ueber einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. 1—3. — Sitzungsber. der Preus. Akad. der Wiss., Berlin, 1918, Bd. XLVIII, SS. 1120—1135; Mathem. Zeitschr., Berlin, 1920, Bd. VII, SS. 126—231; 1933, Bd. XXXVI, SS. 481—562.

208. Lichtenstein, L. Untersuchungen ueber die Gestalt der Himmelskörper. 1—4. — Mathem. Zeitschr., Berlin, 1918, Bd. I, SS. 229—284; 1919, Bd. III, SS. 172—174; 1922, Bd. XII, SS. 201—218; 1923, Bd. XVII, SS. 62—110.

209. Perron, O. Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei grossen Werten der unabhängig Variablen. — Mathem Zeitschr., 1918, Bd. I, SS. 27—43.

1919

210. Колосов, Г. В. Заметка о движении твердого тела в несжимаемой жидкости в случаях В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова. — Изв. Росс. Акад. Наук, 1919, т. XIII, № 12—15, стр. 711—716.

То же. — Матем. и астрон. сб. (Изв. Росс. Акад. Наук, нов. серия, 1919), П., 1922, стр. 711—716.

211. Humbert. P. Sur le calcul approché des éléments des Jacobiens critiques d'ordre élevé. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences Paris, 1919, t. CLXIX, pp. 902—903.

1920

212. Humbert, P. Les calculs de G. H. Darwin sur la stabilité de la figure piriforme. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1920, t. CLXX, pp. 38—40.

213. Rosenblatt, A. Sur un théorème de A. Liapounoff. — Bull. des sciences mathém., Paris, 2 série, 1920, t. XLIV, pp. 156—168.

214. Véronnet, A. Figures d'équilibre d'un liquide en rotation. Ordre de succession des figures critiques de bifurcation. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1920, t. CLXX, pp. 1303—1305.

1923

215. Dulac, H. Sur les cycles limites. — Bull. de la Soc. mathém. de France, 1923, t. LI, pp. 45—188.

216. Lense, J. Ueber eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren. — Mathem. Zeitschr., Berlin, 1923, Bd. XVI, SS. 296—300.

1925

217. [Стеклов, В. А.] Stekloff, W. Les recherches posthumes de Liapunoff sur les figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Préface au livre: Sur certaines séries de figures d'épuilibre d'un liquide hétérogène en rotation. L. 1925—1927. XI pp.

То же. Proceedings of the International mathematical congress. Toronto. V. II. Pp. 23—30.

1926

218. Четаев, Н. Г. Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под действием сил лучистого сжатия к центру тяжести. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., М., 1926, т. XXVI, стр. 49—94.

219. Hölder, E. Beiträge zur mathematische Theorie der Gestalt des Erdmondes. — Ber. der Sächs. Akad. der Wiss. zu Leipzig, mathem.-phys. Kl., 1926, Bd. LXXVIII, SS. 73—88.

220. Hölder, E. Ueber einige Integralgleichungen aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Anwendung auf Stabilitätsbetrachtungen. — Ber. der Sächs. Akad. der Wiss. zu Leipzig, mathem. — phys. Kl., 1926, Bd. LXXVIII, SS. 52—72.

221. Véronnet, A. Figures d'équilibre et cosmogonie. Paris. 1926. 62 p. Bibliogr. (pp. 54—60). (Mémorial des sciences mathématiques. F. XIII).

1927

222. [Бернштейн, С. Н.] Bernstein, S. Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. — Mathem. Ann., Berlin, 1927, Bd. XCVII, H. 1—2, SS. 1—59.

То же. Перев. на русск. яз. под загл.: Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. — Усп. матем. наук, М. — Л., 1944, вып. 10, стр. 65—114.

1928

223. Орлов, М. Нові обчислення фігур відносної ривноваги однорідної рідани. — Всеукр. Акад. Наук, Тр. Физ.-мат. відділу, Київ, 1928, т. IX, вып. 2, стр. 1—55.

224. Frommer, M. Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. — Mathem. Ann., 1928, Bd. XCIX, SS. 222–272.

То же. Перев. на русск. яз. — Усп. матем. наук, 1941, вып. 9, стр. 212—253.

225. Lichtenstein, L. Ueber eine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. — Mathem. Zeitschr., Berlin, 1928, Bd. XXVIII, SS. 635—640.

226. Perron, O, Ueber Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystem. — Mathem. Zeitschr., 1928, Bd. XXIX, SS. 129—160.

1929—1930

227. [Малкин, И. Г.] Malkin, I. G. Das Existenzproblem von Liapounoffschen Funktionen. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 3-я серия, 1929—1930, т. IV, стр. 51—62; 1931, т. V, стр. 63—84 (Статья 2. Дополнения и приложения. На русск. яз.).

228. [Романовский, В. И.] Romanovskij, V. Sur une extension du théorème de A. Liapounoff sur la limite de probabilité. — Изв. Акад. Наук СССР, 7-я серия, 1929, № 2, стр. 209—225.

229. [Четаев, Н. Г.] Četajev, N. Sur la réciproque du théorème de Lagrange. — Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 1930, t. CXC, pp. 360—362.

230. [Четаев, Н. Г.] Četajev, N. Ueber die von den Ellipsoiden abgeleiteten Gleichgewichtsfiguren. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 3-я серия, 1929—1930, т. IV, стр. 1—36.

231. Perron, O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme. — Mathem. Zeitschr., 1930, Bd. XXXI, SS. 748—766.

232. Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. — Mathem. Zeitschr., 1930, Bd. XXXII, SS. 703—728.

1931

233. [Колмогоров, А. Н.] Kolmogorov, A. Eine Verallgemeinerung des Laplace — Liapounoffschen Satzes. — Изв. Акад. Наук СССР, 7-я серия, 1931. № 7, стр. 959—962.

234. Персидский, К. П. Заметка к вопросу об устойчивости движений. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 3-я серия, 1931, т. V, стр. 56—62.

235. Четаев, Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. — Уч. зап. Казанск. Гос. унив., 1931, кн. 4, вып. 1, стр. 3—8.

236. Lichtenstein, L. Vorlesungen ueber einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin. 1931. 164 SS.

1932

237. Персидский, К. П. О предельных теоремах. — Уч. зап. Казанск. Гос. унив., 1932, кн. 4, вып. 1, стр. 43—48.

238. Персидский, К. П. Об одной теореме устойчивости движения. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 13-я серия, 1932—1933, т. VI, стр. 76—79.

239. Хинчин, А. Я. Основные законы теории вероятностей. М. — Л. 1932. 84 стр. Библиогр. (5 назв.).

240. Appell, P. Traité de mécanique rationnelle. T. IV. Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation. 2 ed. Paris. 1932. 342 p., avec fig.

1933

241. Андронов, А. и А. Витт. Об устойчивости по Ляпунову. — Журн. эксперим. и теоретич. физ., 1933, т. III, вып. 5, стр. 373—374.

242. Малкин, И. Г. К вопросу об устойчивости движения. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст., 1933, № 1, стр. 64—65.

243. Малкин, И. Г. Об устойчивости интегралов некоторых систем дифференциальных уравнений. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст., 1933, № 1, стр. 32—37.

244. [Марков А. А.] Markoff, A. Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität. — Mathem. Zeitschr., Berlin, 1933, Bd. XXXVI, SS. 708—738.

245. Неронов, Н. П. Об одном методе нахождения фигур относительно равновесия однородной вращающейся жидкой массы, соседних с эллипсоидальными. — Изв. Акад. Наук СССР, 7-я серия, 1933, № 2, стр. 215—227.

То же. Перев. на французск. яз. под загл.: Sur une méthode des ellipsoïdes, d'une masse liquide homogène en rotation. — Ann. di matem. pura ed appl., Bologna, 1936, 4 serie, t. XV, pp. 175—185.

246. Персидский, К. П. О некоторых случаях устойчивости движений. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст., 1933, № 1, стр. 59—64.

247. Персидский, К. П. Об устойчивости движения по первому приближению. — Матем. сб., М. — Л., 1933, т. XL, вып. 3, стр. 284—293.

248. Hölder, E. Zur Theorie in homogener Gleichgewichtsfiguren, 1. Mitteilung. Homogene Ausgangsfiguren. — Mathem. Zeitschr., Berlin, 1933, Bd. XXXVI, H. 3 u. 4, SS. 563—580.

249. Hopfner, F. Physikalische Geodasie. Leipzig. 1933. 434 S. mit Fig. (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, Bd. XIV).

250. Lichtenstein, L. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin. 1933. 174 S., mit 4 Abb.

251. Peyovitch, T. Sur la valeur des intègrales á l'infini des èquations diffèrentielles linèaires. — Bull. de la Soc. mathem. de France, 1933, t. XLI, pp. 85—94.

252. Zardecki, W. Sur certaines figures d'une masse fluide hétérogène en rotation permanente et zonale. — Bull. de l'Acad. des sciences mathém. et natur., Belgrade, 1933, № 1, pp. 47—61.

1934

253. [Гюнтер, Н. М.] Gunther, N. M. La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Paris. 1934. 303 pp. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions sous la direction de E. Borel).

254. Дубошин, Г. Н. Об устойчивости движения в сопротивляющейся среде. — В кн.: Труды Второго Всесоюзного математического. съезда. Ленинград. 24—30 июня 1934 г., т. II. Л. — М. 1936, стр. 226—227.

255. Кузьмин, Р. О. О методе Ляпунова и теории вероятностей. — Тр. Ленинградск. инст. инж. пром. строит., Л., 1934, вып. 2, стр. 49—64.

256. [Крылов, Н. М. и Боголюбов. Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев. 1934. 109 стр. Библиогр. (17 назв.). (Всеукраинская Академия Наук. Институт строительной механики. Кафедра математической физики).

257. Малкин, И. И. Об обращении теоремы Lagrange'a. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст. им. П. И. Баранова, 1934, № 2, стр. 31—32.

258. [Малкин, И. Г.] Malkin, I. J. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст. им. П. И. Баранова, 1934, № 2, стр. 21—28.

259. [Орлов, М.] Orlow, M. Ueber ein Problem von Liapounoff. — Сообщ. Харьк. матем. общ. и Инст. матем. и мех. при Харьк. унив., 4-я серия, 1934, т. XVI, стр. 63—64.

260. Петровский, И. Г. Ueber das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes. — Матем. сб., 1934, т. XLII, вып. 1, стр. 107—155 Дополнение. — Там же, 1935, т. XLII, вып. 3, стр. 403 (На немецк. яз.).

261. Четаев, Н. Г. К вопросу об обращении теоремы Лагранжа. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст. им. П. И. Баранова, 1934, № 2, стр. 29—30.

262 Четаев, Н Г. Одна теорема о неустойчивости — Докл Акад. Наук СССР, нов. серия, 1934, т I, № 9, стр 529—531

263. Четаев, Н Г Об одной мысли Пуанкаре — Сб. научн. тр. Казанск авиац инст. им П И. Баранова, 1934, № 2, стр. 18—20; 1935, № 3, стр. 3—6, 1940, № 10, стр. 3—4

264. Frommer, M. Ueber das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen — Mathem Ann, 1934, Bd CIX, SS. 395—424.

1935

265 Адамов, Н В Геометрический смысл условия устойчивости Ляпунова. — Докл. Акад Наук СССР, нов серия, 1935, т, II, № 5—6, стр. 361—364. Библиогр (4 назв.).

266. Адамов, Н. В Некоторые достаточные условия устойчивости — Докл Акад. Наук СССР, нов серия, 1935, т. II, № 7, стр 447—450.

267 Адамов, Н. В Sur l'oscillation des intégrales de l'équation du deuxieme ordre aux coefficients périodiques et sur quelques conditions de la stabilité — Матем сб, 1935, т XLII, вып. 6, стр. 651—668.

268 Дубошин, Г Н. Некоторые критерии устойчивости для уравнения $x + px = 0$. — Докл Акад Наук СССР, нов. серия, 1935, т. III, № 9, стр 390—392 Библиогр (4 назв.).

269. Дубошин, Г Н. Об устойчивости движения. — В кн. Мультон, Ф. Введение в небесную механику М — Л 1935, стр. 446—479. Библиогр. (6 назв)

270 Дубошин, Г. Н Об устойчивости решений канонических систем. — Докл Акад Наук СССР, нов серия, 1935, т I, № 5, стр. 273—279.

271. Дубошин, Г. Н Опыт исследования устойчивости решений неголоморфных систем. — Матем сб, М. — Л., 1935, т. XLII, вып. 5, стр 601—612

272. [Дубошин, Г Н] Doubochine, G. Sur la stabilité de certaines solutions particulières dans le problème du mouvement dans un milieu résistant — Изв Акад Наук СССР, 7-я серия, 1935, № 4, стр 525—558.

273. Каменков, Г. В Исследование одного особенного, по Ляпунову, случая задачи устойчивости движения — Сб. научн тр Казанск. авиац. инст. им. П И. Баранова, 1935, № 3, стр. 24—31

274. Каменков, Г В Исследование одного особенного случая задачи об устойчивости движения. 1—2 — Сб научн. тр. Казанск. авиац. инст им. П. И. Баранова, 1935, № 4, стр 3—18; № 5, стр 19—27

275. Малкин, И. Г. Об устойчивости по первому приближению. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст. им. П. И. Баранова, 1935, № 3, стр. 7—17.

276. Персидский, К. П. К устойчивости движений. — Матем. сб., М. — Л., 1935, т. XLII, вып. 1, стр. 37—42.

1936

277. Аппелль, П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л. — М. 1936. 375 стр., с рис. Библиогр. (стр. 367—370).

278. Дубошин, Г. Н. Об одном частном случае движения в сопротивляющейся среде с переменной массой. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1936, т. IV (XII), № 5 (100), стр. 211—214.

279. Дубошин, Г. Н. Об устойчивости круговых движений в сопротивляющейся среде. — Астрон. журн., 1936, т. XIII, стр. 455—486.

280. Идельсон, Н. И. Постановка проблемы фигур равновесия в теории А. М. Ляпунова. — В кн.: Аппелль, П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л. — М. 1936, стр. 319—357.

281. Кондурарь, В. Т. Проблема движения двух эллипсоидов под действием взаимного протяжения. 1—2. — Астрон. журн., 1936, т. XIII, вып. 6, стр. 563—588; Тр. Гос. Астрон. инст. им. П. К. Штернберга, М., 1939, т. XI, вып. 2, стр. 307—369. Библиогр. (13 назв.; ч. II).

282. Моисеев, Н. Д. О вероятности устойчивости по Ляпунову. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, М., 1936, т. I (X), № 5 (82), стр. 211—213.

283. Моисеев, Н. Д. О некоторых общих методах качественного изучения форм движения в проблемах небесной механики. Ч. 1—6. — Тр. Гос. Астрон. инст. им. П. К. Штернберга, М., 1936, т. VII, вып. 1, стр. 5—121; 1939, т. IX, вып. 2, стр. 5—44. Библиогр. (30 назв.); 1939, т. IX, вып. 2, стр. 47—81. Библиогр. (17 назв.); 1940, т. XIV, вып. 1, стр. 7—41. Библиогр. (8 назв.); 1940, т. XIV, вып. 1, стр. 42—68. Библиогр. (5 назв.); 1940, т. XIV, вып. 1, стр. 69—71.

284. Моисеев, Н. Д. О несущественности одного из ограничений, налагаемых на топографические системы в теории устойчивости по Ляпунову. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, М., 1936, т. I (X), № 4 (81), стр. 159—160.

285. [Моисеев, Н. Д.] Moiseiev, N. D. Ueber die Stabilität von Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen. — Mathem. Ann., Berlin, 1936, Bd. CXIII, H. 3, SS. 452—460.

286. Четаев, Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст. им. П. И. Баранова, 1936, № 5, стр. 3—18.

287. Четаев. Н. Г. Устойчивость и классические законы. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст. им. П. И. Баранова, 1936, № 6, стр. 3—5.

288. Einaudi, R. Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema ad elasticitá quasi-costante. — Atti della Accademia della scienze, Torino, Cl. I, 1936, t. LXXI, pp. 292—298.

1936—1937

289. Альмухамедов, М. А. К проблеме центра. — Изв. Казанск. физ.-матем. общ., 3-я серия, 1936—1937, т. VIII, стр. 29—36.

290. Альмухамедов, М. А. Об условиях наличия особой точки типа „центр". — Изв. Казанск. физ.-матем. общ., 3-я серия, 1937, т. IX, стр. 105—121.

291. Малкин, И. Г. Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Казань. 1937. 100 стр. (Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст. им. П. И. Баранова, № 7).

292. Малкин, И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1937, т. XV, № 8, стр. 436—439.

То же. — Матем. сб., М., нов. серия, 1938, т. III (XLV), вып. 1, стр. 47—101.

293. Моисеев, Н. Д. Об устойчивости и противоустойчивости обобщенного третьего типа. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1937, т. XVI, № 6, стр. 299—302.

294. [Моисеев, Н. Д.] Moiseiev, N. D. Ueber Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnung. — Mathem. Zeitschr., Berlin, 1937, Bd. XLII, SS. 513—537.

295. Персидский, К. П. К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений. — Изв. Физ.-матем. общ. и Научно-исследов. инст. матем. и мех. при Казанск. унив., М., 3-я серия, 1936—1937, т. VIII, стр. 47—85; 1938, т. XI, стр. 29—45.

296. Персидский К. П. Об одной теореме Ляпунова. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1937, т. XIV, № 9, стр. 541—544.

297. Халиков, Х. С. Об устойчивости „в большом" интегралов дифференциальных уравнений. — Изв. Физ.-матем. общ. и Научно-исследов. инст. матем. и мех. при Казанск. унив., М., 3-я серия, 1937, т. IX, стр. 31—59.

298. Förster, H. Ueber das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. — Mathem. Zeitschr., 1937, Bd. XLIII, SS. 271—320.

1938

299. Бебутов, М. В. О динамических системах, устойчивых по Ляпунову. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XVIII, № 3, стр. 155—158.

300. Куклес, И. С. О центрах и фокусах. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XIX, № 6—7, стр. 459—464. Библиогр. (6 назв.).

301. Малкин, И. Г. Об устойчивости движения по первому приближению. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XVIII, № 3, стр. 159—163.

302. Малкин, И. Г. Обобщение основной теоремы Ляпунова об устойчивости движения. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XVIII, № 3, стр. 162—164.

303. Моисеев, Н. Д. О построении областей сплошной устойчивости и неустойчивости в смысле Ляпунова. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XX, № 6, стр. 419—422. Библиогр. (6 назв.).

304. Моисеев, Н. Д. О сходимости рядов, формально представляющих простые периодические решения. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XVIII, № 8, стр. 533—536.

305. Моисеев, Н. Д. О фазовых областях сплошной устойчивости и неустойчивости. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XX, № 6, стр. 423—425. Библиогр. (10 назв.).

306. Неронов, Н. Про положення нестійкої рівноваги в одній проблемі динаміки. (Sur les positions d'équilibre instable dans un problème de dynamique). — Зап. Науководослід. инст. матем. и мех. Харків. матем. товариства, 4-я серия, 1938, т. XVI, стр. 81—97.

307. Сретенский, Л. Н. Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы. — Усп. матем. наук, 1938, вып. 5, стр. 187—230.

308. Степанов, В. В. К определению вероятности устойчивости. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1938, т. XVIII, № 3, стр. 151—153.

309. Халиков, Х. С. Замечание об одной теореме устойчивости движения. — Изв. Казанск. физ.-матем. общ., 3-я серия, 1938, т. XI, стр. 199—200.

310. Четаев, Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. — Уч. зап. Казанск. Гос. унив., 1938, т. XCVIII кн. 9, Математика, вып. 3, стр. 43—58.

311. Mises, R. Ueber den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung. — Compositio mathematica, Gröningen, 1938, v. VI, SS. 203—220.

1939

312. Бернштейн, С. Н. Несколько замечаний по поводу предельной теоремы Ляпунова. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1939, т. XXIV, стр. 3—7.

313. Каменков, Г. В. Об устойчивости движения. Казань. 1939, 136 стр. (Тр. Казанск. авиац. инст., № 9).

* 314. Макаров, С. Некоторое обобщение основных теорем Ляпунова об устойчивости движения. — Изв. Физ.-матем. общ. и Научно-иссл. инст. матем. и мех. при Казанск. унив., 3-я серия, 1939, т. X, стр. 139—158.

315. Моисеев, Н. Д. О современном состоянии качественной небесной механики. Ч. 1. Об областных характеристиках семейств траекторий в случае двух степеней свободы. — Астрон. журн., 1939, т. XVI, № 4, стр. 69—83. Библиогр. (78 назв.).

316. Отроков, Н. Ф. К устойчивости периодических интегралов. — Уч. зап. Горьк. Гос. унив., 1939, вып. 6, стр. 125—128.

1940

317. Богаутдинов, Г. Н. Об одной теореме неравномерной устойчивости. — Уч. зап. Казанск. Гос. унив., 1940, т. С, кн. 5, вып. 4, стр. 120—127.

318. Дубошин, Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. — Тр. Гос. астрон. инст. им. П. К. Штернберга, М., 1940, т. XIV, вып. 1, стр. 153—171.

319. Дубошин, Г. Н. Об устойчивости кольца Сатурна. — Тр. Гос. астрон. инст. им. Штернберга, 1940, т. XIV, вып. 1, стр. 172—207.

320. Малкин, И. Г. Об одной теореме существования Ляпунова. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1940, т. XXVII стр. 307—311.

1941

321. Малкин, И. Г. Об одной теореме существования Пуанкаре — Ляпунова. — Уч. зап. Свердл. унив. им. А. М. Горького, 1941, вып. 3, стр. 3—10.

322. Trjitzinski, W. Properties of growth for solutions of differential equations of dynamical type. — Trans. of Americ. Mathem. society, 1941, v. L., pp. 252—294.

1942

323. Малкин, И. Г. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, Инст. мех.), 1942, т. VI, вып. 6, стр. 411—448. Библиогр. (10 назв.).

1943

324. Четаев, Н. Г. О вынужденных движениях. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук., Инст. мех.), 1943, т. VII, стр. 25—30.

1944

325. Куклес, И. С. О необходимых и достаточных условиях существования центра. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1944, т. XLII, № 4, стр. 164—167.

326. Куклес, И. С. О некоторых случаях отличия фокуса от центра.—Докл.Акад. Наук СССР, нов. серия, 1944, т. XLII, № 5, стр. 212—215.

327. Лурье, А. И. и Постников, В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, Инст. мех.), 1944, т. VIII, вып. 3, стр. 246—248.

328. Малкин, И. Г. Об устойчивости периодических движений динамических систем. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, Инст. мех.), 1944, т. VIII, вып. 4, стр. 327—331.

329. Малкин, И. Г. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук., Инст. мех.), 1944, т. VIII, № 3, стр. 241—245. Библиогр. (3 назв.

330. Четаев, Н. Г. Теорема о неустойчивости для правильных систем. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, Инст. мех.), 1944, т. VIII, вып. 4, стр. 323—326.

1945

331. Дубошин, Г. Н. Об устойчивости тривиальных решений некоторых дифференциальных уравнений небесной механики. 2. Об устойчивости в некотором частном случае неустановившегося движения. — Уч. зап. Моск. гос. унив., 1945, вып. 96: Тр. Гос. Астрон. инст. им. Штернберга, т. XV, вып. 1, стр. 308—311.

332. Лурье, А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, Инст. мех.), 1945, т. IX, вып. 5, стр. 353—367. Библиогр. (6 назв.).

333. Моисеев, Н. Д. О некоторых методах теории технической устойчивости. Ч. 1. О выводе достаточных условий технической устойчивости методом грубой квадратурной мажорации. — Тр. Воен.-возд. акад. им. Жуковского, 1945, вып. 135, стр. 1—27.

334. Рытов, С. М. Об одном расширении области применения метода малого параметра. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1945, т. XLVII, № 3, стр. 186—189. Библиогр. (6 назв.).

335. Четаев, Н. Г. О наименьшем характеристичном числе. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, Инст. мех.), 1945, т. IX, вып. 3, стр. 193—196.

336. Четаев, Н. Г. Об одной задаче Коши.—Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, Инст. мех.), 1945, т. IX, вып. 2, стр 139—142.

337. Четаев, Н. Г. Об устойчивости движения. — Изв. Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук, 1945, № 6, стр. 482—490.

1946

338. Бернштейн, С. Н. Теория вероятностей. 4-е, доп. изд. Л. — М. ОГИЗ. 1946. 556 стр. библиогр. (стр. 547—549).

339. Воронов, Б. В. Теорема Четаева о неустойчивости с точки зрения ее доказательства. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 10 февраля 1945 г.). В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 2. 1946, стр. 25—44 (Военная воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского).

340. Еругин, Н. П. Приводимые системы. Л. — М. 1946. 95 стр. (Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. XIII).

То же. [Тезисы]. — Научн. бюлл. Ленингр. Гос. унив., 1945, № 2, стр. 5—6.

То же. Отд. оттиск. 2 стр. (Научная сессия, посвященная 125-летию Ленингр. унив.).

341. Костюк, А. К. Определение устойчивости в смысле Ляпунова и его возможные истолкования. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 30 декабря 1944 г.) В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 1. 1946, стр. 31—40. (Военная воздушная академия им. Н. Е. Жуковского).

342. Кузьмин, П. А. Об одном преобразовании уравнений возмущенного движения. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. инст., 1946, вып. XVII, стр. 27—31.

343. Моисеев, Н. Д. Количественный аспект теории устойчивости. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 17 ноября 1945 г.). В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 1. 1946, стр. 95—105. (Военная воздушная академия им. Н. Е. Жуковского).

344. Моисеев, Н. Д. Обзор истории развития понятия и теории устойчивости в смысле Ляпунова. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 30 октября 1944 г.). В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 1. 1946, стр. 5—29. (Военная воздушная академия им. Н. Е. Жуковского).

345. Моисеев, Н. Д. Построение функций Ляпунова для системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в обыкновенных случаях. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 24 марта 1945 г.). В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 2. 1946, стр. 69—96. (Военная воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского).

346. Моисеев, Н. Д. Структура книги Ляпунова „Общая задача по устойчивости движения“. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 4 и 18 декабря 1944 г.). В кн.: Записки семинара по теории устой-

чивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 1. 1946, стр. 41—74. (Военная воздушная академия им. Н. Е. Жуковского).

347. Мышкис, А. Д. Второй противоречащий пример к формулировке 1934 г. теоремы Четаева о неустойчивости. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 26 января 1945 г.). В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 2. 1946, стр. 21—23. (Военная воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского).

348. Мышкис, Ч. Д. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения приведенной нелинейной системы дифференциальных уравнений в обыкновенных случаях. (Доклад, прочитанный на заседаниях семинара 24 марта — 7 апреля 1945 г. В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 2. 1946, стр. 97—108. (Военная воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского).

349. Мышкис, А. Д. Обобщение первой теоремы Ляпунова о неустойчивости на случай зависящей от времени части окрестности невозмущенного состояния. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 26 января 1946 г.). В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 2. 1946, стр. 45—67. (Военно-воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского).

350. Персидский, К. П. К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений. (Резюме докторской диссертации). — Усп. матем. наук, М., нов. серия, 1946, т. I, вып. 5—6 (15—16), стр. 250—255.

351. Сретенский, Л. Н. Теория Ньютоновского потенциала. М. — Л. 1946. 318 стр.

352. Туманов, С. И. Метод функций V или так называемая „вторая метода“ Ляпунова. (Доклады, прочитанные на заседании семинара 13 и 27 января 1945 г.) В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 2. 1946, стр. 5—16. (Военная воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского).

353. Туманов, С. И. Противоречащий пример к формулировке 1934 г. теоремы Четаева о неустойчивости. (Доклад, прочитанный на заседании семинара 10 февраля 1945 г.). В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. Под ред. Н. Д. Моисеева. Вып. 2. 1946, стр. 17—20. (Военная воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского)

354. Четаев, Н. Г. Об устойчивости вращательных движений снаряда. — Прикл. матем. и мех. (Акад. Наук СССР, Отд. технич. наук. Инст. мех.), 1946, т. X, вып. 1, стр. 135—138.

355. Четаев, Н. Г. Устойчивость движения. М. — Л. 1946. 204 стр.

356. Lefschets. Lectures on differential equations. Princeton. 1946. 210 pp.

1947

357. Линник, Ю. В. О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин. — Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 1947, т. XI, № 2, стр. 111—138.

358. Лурье, А. И. Об устойчивости движения одной динамической системы. — Прикл. матем. и мех., 1947, т. XI, вып. 4, стр. 445—448. (Отд. технич. наук Акад. Наук, Инст. мех.).

359. Мышкис. А. Д. Об одной геометрической лемме, имеющей приложение к теории устойчивости Ляпунова. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1947, т. LV, № 4, стр. 299—302.

360. Немыцкий, В. В. и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. М. — Л. 1947. 448 стр.

361. Сапогов, Н. А. Предельная теорема Лапласа — Ляпунова для сингулярной цепи Маркова. — Докл. Акад. Наук СССР, нов. серия, 1947, т. LVIII, № 9, стр. 1905—1908.

362. Bellman, R. On the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations. — Trans. Amer. Mathem. society, 1947, v. LXII, pp. 357—386.

363. Minorsky, N. Introduction to non-linear mechanics. 1947. Ann. Arbor. XIV, 447 pp. [Литографированное издание].

Составила *А. М. Лукомская.*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Общая задача об устойчивости движения 7
Предисловие 9
Глава I Предварительный анализ 17
Постановка вопроса 17
О некоторых системах линейных дифференциальных уравнений 37
О некотором общем случае дифференциальных уравнений возмущенного движения 63
Некоторые общие предложения 79
О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле 97
Предисловие 99
Глава I Вспомогательные предложения и допущения . . . 102
Глава II Основная задача электростатики 131
Глава III Задача Дирихле 146
Об одной теореме теории вероятностей 179
Новая форма теоремы о пределе вероятности 219
Исследования в теории фигуры небесных тел 251
О форме небесных тел 301

Приложения

Биография А. М Ляпунова. Академик *В. И Смирнов* 325
Очерк научных трудов А. М Ляпунова. Академик *В. И. Смирнов* 341
I Устойчивость равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы 344
II. Фигуры равновесия равномерно вращающейся жидкости . 395
III Работы по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости 423
IV Различные работы 444
Комментарий к главе I работы „Общая задача об устойчивости движения". Член-корреспондент АН СССР *Н. Г. Четаев* . . . 451
Комментарий к работе „О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле" Член-корреспондент АН СССР *Л. Н. Сретенский* 457

Комментарий к работам по теории вероятностей. Академик *С. Н. Бернштейн* 477
Комментарий к работе „Исследования в теории фигуры небесных тел“. Член-корреспондент АН СССР *Л. Н. Сретенский* . . 484
Примечание к лекции А. М. Ляпунова. „О форме небесных тел“. Академик *А. Н. Крылов* 493
Библиографический указатель печатных трудов и материалов о жизни и деятельности А. М. Ляпунова. *А. М. Лукомская* . 495
I. Работы А. М. Ляпунова, опубликованные в печати 495
II. Материалы о жизни и деятельности А. М. Ляпунова . . 511
III. Основная научная литература, относящаяся к работам А. М. Ляпунова 521

Печатается по постановлению Редакционно-издательского Совета Академии Наук СССР

*

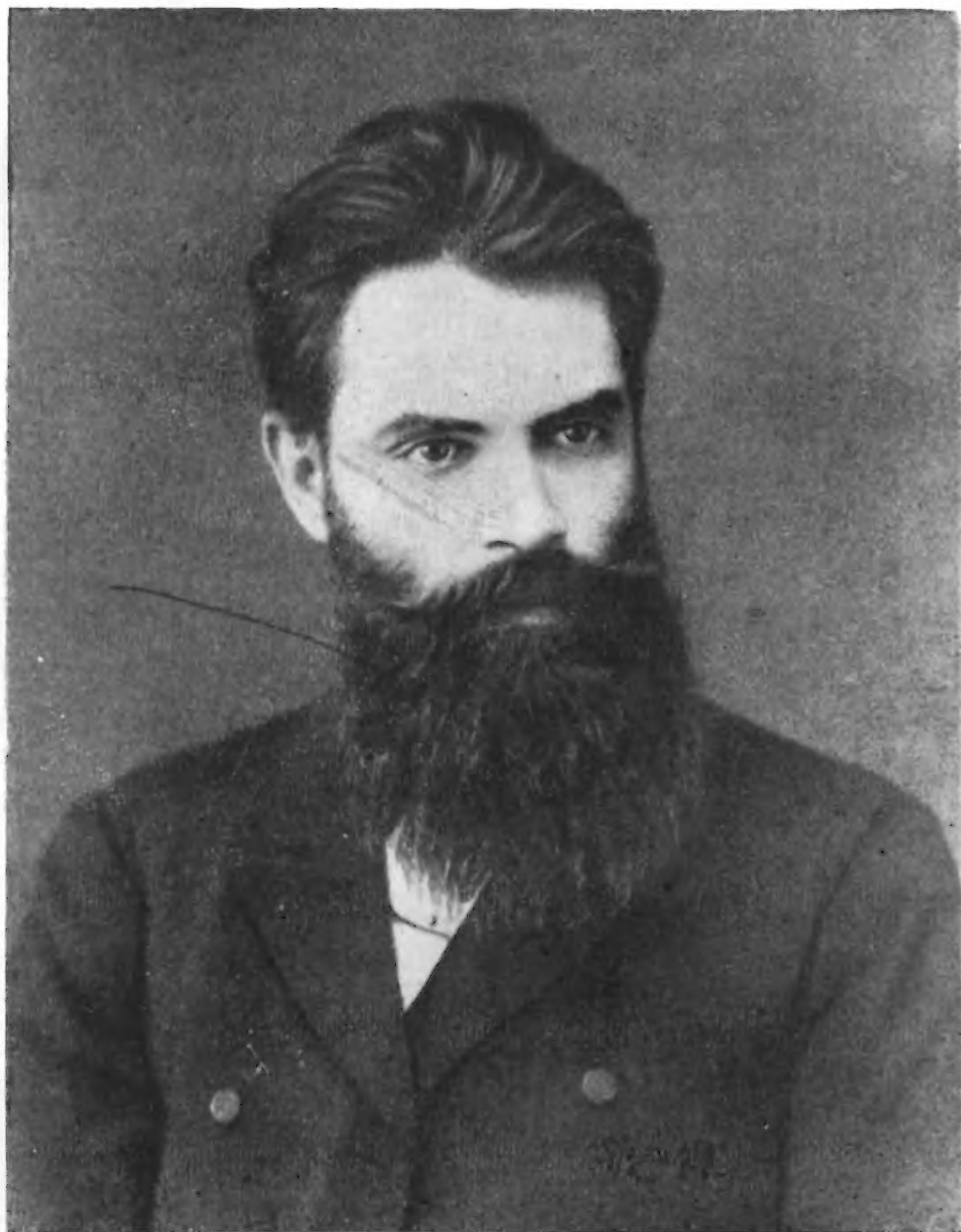
Художник *Н. Н. Седиков*
Технический редактор *Р. С. Певзнер*
Корректоры *А. Д. Копысова* и *Н. А. Малевич*

РИСО АН СССР № 3274. Подписано к печати 1/XI 1948 г. Печ. л. $33^3/_4$ + 2 вклейки.
Уч.-изд. л. 38. М-19515. Тираж 3000. Заказ № 1297.

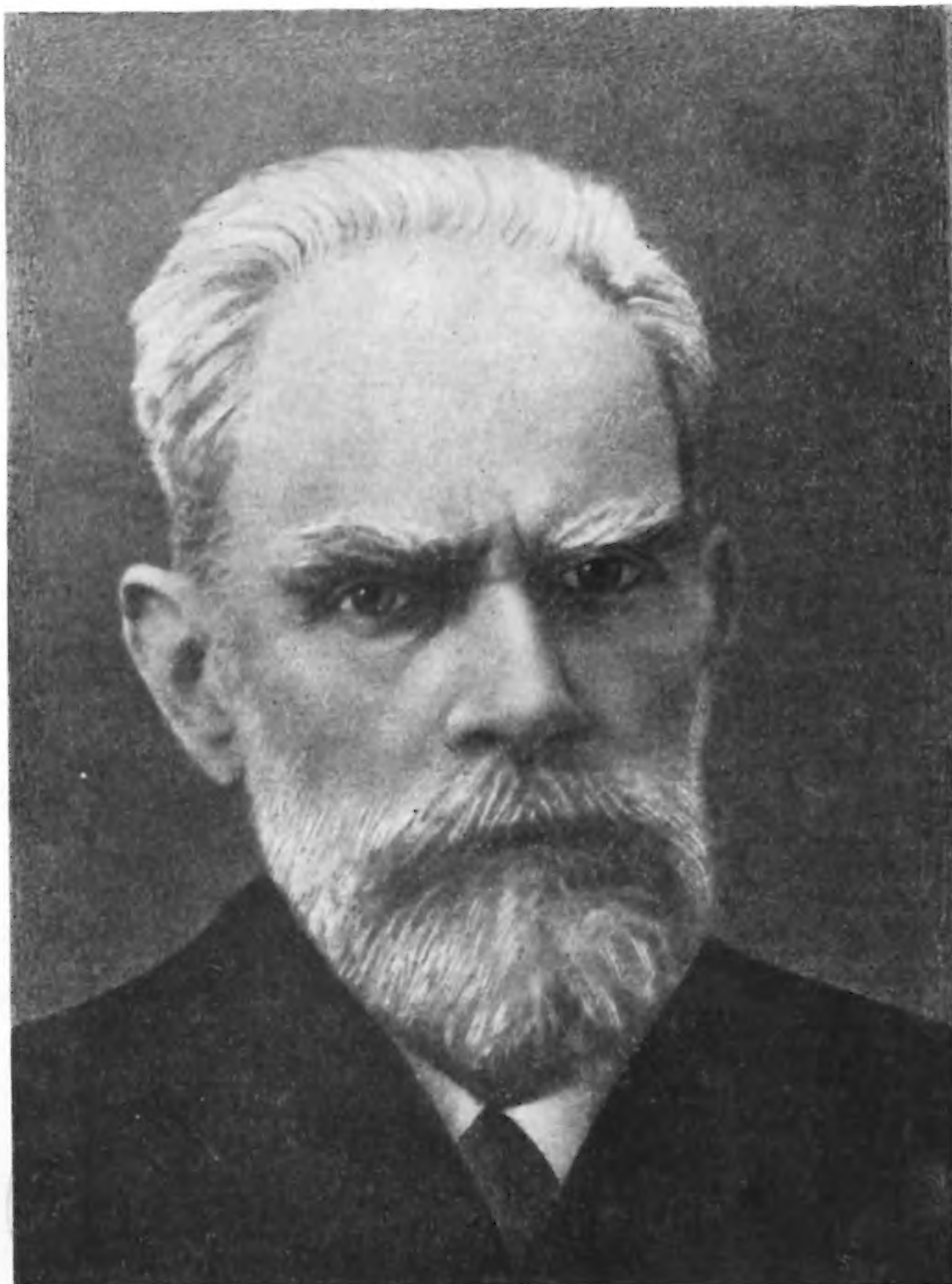
1-я Типография изд-ва Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 л. 12.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
112	5 сн.	точки p	точки p_0
159	3 св.	$\lvert \bar{f} - f \rvert < b\rho^{\beta+1}$	$\lvert \bar{f} - f_0 \rvert \leqslant b\rho^{\beta+1}$
161	2 св.	$(\rho^2 - 2\zeta)(T^5 - 1) +$	$(\rho^2 - 2\zeta^2)(T^5 - 1) +$
211	4 сн.	$+ \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3} L^3 n\tau^3}.$	$+ \frac{4}{3} e^{\frac{2}{3} L^3 n\tau^3}.$
222	1 сн.	$< \left(\sum f(x) x^n\right) \left(\sum f(x) x^l\right)^{m-n}.$	$< \left(\sum f(x) x^n\right)^{l-m} \left(\sum f(x) x^l\right)^{m-n}.$
288	9 св.	$x^{i+} \frac{}{dx^i} \frac{x^{1-\alpha}}{dx^j} = (i, j, \alpha),$	$x^{i+j-1} \frac{d^i x^\alpha}{dx^i} \frac{d^j x^{1-\alpha}}{dx^j} = (i, j, \alpha),$
329	15 сн.	Весною 1895 г.	Весною 1885 г.
369	8 св.	функции (25)	функции (27)
390	9 св.	$A_2 \leqslant \frac{1}{90} A_1^3.$	$A_3 \leqslant \frac{1}{90} A_1^3.$
393	11 сн.	и φ близко к нулю,	и μ близко к нулю,
481	13 св.	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t_2}{2}} t\, dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^p dt$



А. М. ЛЯПУНОВ
(1886)



А. Ляпунов

А.М. ЛЯПУНОВ

ИЗБРАН
НЫЕ
ТРУДЫ





32[illegible]